Sujets Maths en Jeans 2019-2020

Proposés par Vincent Guirardel

13 octobre 2019

1 Harpe de pythagore

Pythagore aimait la musique, les fractions et les triangles. Il aurait pu imaginer la harpe (infinie) suivante : on appele $\mathcal{E}$ l'ensemble des points du plans dont les coordonnées sont entières (positives ou négatives), et tend une corde entre chaque paire de points A, B de $\mathcal{E}$, à condition que le segment $[A, B]$ ne contienne pas d'autre point de $\mathcal{E}$. Chaque corde fait une note de musique, dont la fréquence est f_0/AB (f_0 étant une constante qui traduit la tension/rigidité de la corde ; c'est la même valeur pour toutes les paires de points). On appelle f_0 la fréquence fondamentale, qui correspond à la note de la corde reliant $O = (0, 0)$ à $I = (1, 0)$.

(Il y a une autre version de la harpe pour laquelle on tend une corde entre tous les points de $\mathcal{E}$, sans condition).

Pythagore trouvait que les intervalles musicaux (c'est à dire entre 2 notes) sonnaient juste lorsque le rapport des fréquences est une fraction (de préférence, le quotient de deux entiers petits). Par exemple, un octave correspond à un rapport de fréquences de 2 : 1, une quinte (dite pythagoricienne) à un rapport de fréquences de 3 : 2. On dira qu'un tel intervalle (ou que la paire de notes) est rationnel (ou harmoniquement rationnel...). Lorsque le rapport des fréquences est un entier, on dira que l'harmonie est entière...

Chacune des questions peut se poser avec les 2 versions de la harpe...

Intervalles rationnels

Question 1.1. *Quels sont les intervalles (=ensemble de 2 notes) qu'on peut jouer ? Existe-t-il un octave (2/1) ? une quinte pythagoricienne (3/2) ? Une tierce harmonique (5/4) ? Est-ce que toutes les fraction $\frac{p}{q}$ apparaissent ? Sinon lesquelles ? En existe-t-il une infinité ?*

Question 1.2. *Y a-t-il des cordes aussi longues (graves) que l'on veut, qui sont en harmonie rationnelle avec la fréquence fondamentale ? Et en harmonie entière ? En harmonie rationnelle mais pas entière ?*

Prenons un intervalle donné entre 2 cordes, par exemple $\sqrt{3}$. Est-ce de toute corde, on peut jouer cet intervalle ? Est-ce que ca depend de l'intervalle ?

Sous-harpes rationnelles Une sous-harpe est un sous-ensemble de point du quadrillage, avec toutes les cordes qui les relient. On voudrait que toutes les rapports de longueurs soient rationnels sur la sous-harpe. Un exemple facile consiste à prendre des points sont alignés.

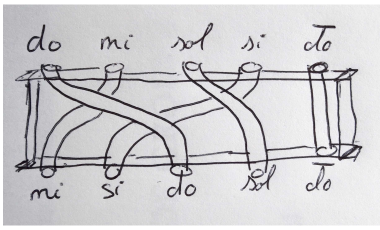
Question 1.3 (Sous-harpes rationnelles)**.** *Existe-t-il une sous-harpe infinie rationnelle, mais pas linéaire ? En existe-t-il des arbitrairement grandes (en nombre de points) ? [la question se pose pour les 2 versions de la harpe]*

Promenade sur la harpe On se balade sur les sommets $\mathcal{E}$, en jouant une 1ere corde, puis une 2nde qui a un sommet en commun avec la 1ere, et ainsi de suite, la contrainte étant que 2 notes consécutives sont en harmonie rationnelle.

Question 1.4. *Partant d'une corde donnée, peut on se promener ainsi et aller à n'importe quel point de $\mathcal{E}$? Est-ce que ca depend de la corde initiale ?*

2 Musique et tuyaux

On imagine système composé de tuyaux, à l'entrée desquels ont dispose des notes de musique (on imagine des petites sphères...), et elles descendent le long des tuyaux et arrivent dans un autre ordre.



Ensuite on recommence avec le même système de tuyaux, on recommence encore, etc.

On peut partir d'une mélodie ou d'une gamme (la gamme majeure do-ré-mi-fa-sol-la-si-do, la gamme blues do-mib-fa-fa#-sol-sib-do, sur un ou plusieurs octaves, en la répétant ou non), ou de tout autre chose...

Question 2.1. *Est-ce que la musique initiale va forcément réapparaitre ? Ou est-ce que la musique initiale peut être perdue à tout jamais ?*

Question 2.2. *Trouver une configuration qui met le plus longtemps possible a se répéter (en partant d'une 20-aine, une 30-aine ou d'une 60aine de notes...) ! Battez des records !*

Question 2.3. *Si on se donne 2 morceaux, est-ce qu'on peut toujours trouver un système de tuyaux qui fait passer de l'un a l'autre en 1 coup ? La réponse est facile : il faut qu'il y ait le meme nombre de chaque notes. Meme question en imposant 2 coups ? 3 coups ? ...*

Question 2.4. *On se donne maintenant 3 mélodies. Est-ce qu'on pourra trouver un système de tuyaux qui part de la première, puis en répétant suffisamment finit par donner la seconde puis la troisième ? Idem avec plus de mélodies.*

Variante : certains tuyaux peuvent changer la note : la monter ou la descendre d'un ton par exemple...

3 Inverses

On veut écrire un nombre comme somme d'inverses d'entiers, sans répétition : exemple : $2 = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/6$

Question : quels sont les nombres qu'on peut écrire sous cette forme ?

Peut on écrire un nombre aussi proche de π ou de $\sqrt{2}$ qu'on veut : entre 3.141592 et 3.141593 ?

Peut-on écrire 20 sous cette forme ?

Est-ce que tout intervalle contient un nombre de cette forme ?

Est-ce que tout entier s'écrit sous cette forme ?

Toute fraction ?

On peut se poser la même question avec les inverses des carrés des entiers.

4 Voûte céleste cubique

Sur une planète (qui n'a pas encore été nommée...), dans une galaxie très, très éloignée, la voûte céleste a une géométrie très particulière. Lorsqu'on y lance un satellite, il se déplace sur le bord d'un parallélépipède rectangle, disons de dimensions $a \times b \times c$. Sur chacune des faces, le satellite circule en ligne droite. Lorsqu'il arrive sur une arête entre deux faces, il continue sur l'autre face en gardant le même angle avec l'arête de jonction. Si le satellite arrive par malchance pile sur l'un des 8 coins, on ne sait pas trop ce qui se passe.

Disons que a, b, c dépendent du type d'orbite qu'on regarde, et on imagine que a, b, c peuvent prendre toutes les valeurs.

Questions Est-ce que le satellite revient toujours a son point de départ, quelle que soit sa configuration initiale ? Est-ce que ca dépend de a, b, c ?

Pour faire un satellite d'observation, on aimerait une orbite qui survole toute la planète. Existe-t-il des orbites qui ne reviennent jamais exactement sur leur pas mais qui visitent tous les points du ciel (ie du parallélépipède) ? Ou est-ce que toute orbite est cantonnée dans une partie du ciel ? Une version de la question peut se reformuler la question ainsi : étant donné d, existe-t-il une orbite telle qui passe a distance d de tout point du ciel ?

On aimerait mettre plusieurs satellites sur la meme orbite (qui se suivraient l'un l'autre), mais si l'orbite se recoupe elle meme, il y a un risque de collision. Un exemple d'orbite qui ne se recoupe pas est une orbite parallèle à un côté du parallélépipède. Y a-t-il d'autres orbites qui ne se recoupent pas ? Peut-on les décrire ? Est-ce que ca dépend de a, b, c ?

Guerre des satellites : un pays peut envoyer des satellites armés dans le ciel. Ces satellites doivent partir d'un point A fixé du parallélépipède (par exemple le centre d'une face), mais peuvent aller dans toutes les directions. Est-ce qu'il existe une zone a l'abri, c'est a dire ou les satellites ne peuvent pas aller ? Est-ce que ca depend de a, b, c ? du point A ?

Autre question : Déterminer le point B le plus éloigné de A (mesuré en temps de trajet des satellites, sachant qu'ils vont tous à la même vitesse v_0).

5 Relier c'est gagner

Il s'agit d'un jeu à 2 joueurs : au départ, on dessine n points dans le plan (par exemple 11). Chaque joueur doit tracer une courbe reliant deux de ces points, et évitant les autres points en respectant les règles suivantes :

- On ne peut pas dessiner plus de 2 courbes partant d'un meme point (2 OK, 3 interdit)
- On ne peut pas dessiner 2 courbes qui relient la même paire de points
- Les courbes ne peuvent pas se croiser les unes les autres (ni se croiser elles-mêmes)

La partie se termine si l'un des 2 joueurs ne peut plus jouer : il a perdu la partie.

Par exemple, si $n = 3$ et que A commence, il est sur de gagner. Si $n = 4$, et que A commence, B a une stratégie gagnante (au 1er coup, il trace une courbe disjointe de celle de A).

Question : Que se passe-t-il pour les autres valeurs de n ? Pour quelles valeurs de n B peut-il être sûr de gagner (s'il joue bien) ? et A ?

6 Paver de grands carrés sans paver le plan

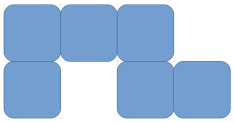
Choisissez un certain nombre (fini) de formes de dominos, formées de carrés de taille 1 (comme dans tetris). C'est votre sac de formes.

On peut essayer de paver le plan (quadrillé), c'est à dire de le recouvrir sans laisser d'espace, et sans que les dominos se chevauchent (et en respectant le quadrillage). On a le droit de prendre autant de dominos de chaque type que vous voulez.

Précision : on s'interdit de faire tourner les dominos (chaque forme a une orientation choisie une fois pour toutes). Si on veut, on a le droit de mettre dans le sac de formes des dominos qui sont tournés l'un par rapport a l'autre.

Certains sacs de dominos permettent de paver le plan entier, certains autres pas.

Par exemple si notre sac contient un seul domino de forme



on peut paver une region contenant un carré 2x2, mais on peut se convaincre qu'il ne pave pas de region contenant un carré 4x4.

Questions Question : peut-on trouver des sacs de dominos qui permettent de paver un demi-plan, mais pas le plan entier ?

Question : Etant donné un sac de dominos qui permet de paver des régions contenant des carrés arbitrairement grands, permet-il de paver le plan en entier ?

Question (record) : trouver des sacs de dominos, chacun constitué d'au plus 10 carrés, tel qu'on ne puisse pas paver le plan avec ces dominos, mais qu'on puisse paver une région contenant un carré $N \times N$ avec N le plus grand possible.

7 Derniers chiffres des puissances.

Question 0. Quels sont les 3 derniers chiffres de $3^{1000,000,000}$? et de $2^{1000,000,000}$?

Regardons les puissances de 3 : 3, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$...

On voit que $03, 09, 27, 81, 43, 29...$ apparaissent comme deux derniers chiffres d'une puissance de 3.

Question 7.1.
— *quels sont les chiffres qui terminent une puissance de 3 (c'est a dire qui apparaissent comme chiffre des unités de 3^n pour un certain n) ?*
— *quels sont les nombres a 2 chiffres qui terminent une puissance de 3 ?*
— *quels sont les nombres a 3 chiffres qui terminent une puissance de 3 ?*

A chaque fois, combien y en a-t-il ? Même question pour les puissances de 2.

Fixons un nombre a 3 chiffres a (par exemple $a = 187$). Appelons *multiplicité* de a dans les puissances de 3, le nombre de n tq 3^n se termine par a (c'est peut-etre infini).

Exemple : la multiplicité de 187 est au moins 1 car ce sont les derniers chiffres de 3^7. Celle de 008 est 0 car les puissance de 3 sont impaires.

— Quelles sont les valeurs possibles pour la multiplicité de a dans les puissances de 3 : est qu'on peut avoir 1 comme multiplicité ? 2 ? 3 ? ∞ ?
— Même question dans les puissances de 2.

Une question un peu différente. Disons que deux nombres $a, b < 1000$ sont de la même *famille* si ils ont une puissance qui se termine par les 3 même chiffres (c'est à dire a^n et b^m ont les même 3 derniers chiffres pour certains n, m).

Question 7.2. *Combien y a-t-il de familles ?*