Sujets Maths en Jeans 2017-2018

Proposés par Vincent Guirardel

September 27, 2017

1 Bien gérer sa taverne

Voici un extrait d'un jeu de rôles, qui explique, lorsqu'un joueur acquiert une affaire (typiquement une taverne), comment calculer ses pertes et ses gains.

Running a Business

Adventurers can end up owning businesses that have nothing to do with delving into dungeons or saving the world. A character might inherit a smithy, or the party might be given a parcel of farmland or a tavern as a reward. If they hold on to the business, they might feel obliged to spend time between adventures maintaining the venture and making sure it runs smoothly.

A character rolls percentile dice and adds the number of days spent on this downtime activity (maximum 30), then compares the total to the Running a Business table to determine what happens.

If the character is required to pay a cost as a result of rolling on this table but fails to do so, the business begins to fail. For each unpaid debt incurred in this manner, the character takes a −10 penalty to subsequent rolls made on this table.

Running a Business

d100 + Days	Result
01–20	You must pay one and a half times the business's maintenance cost for each of the days.
21–30	You must pay the business's full maintenance cost for each of the days.
31–40	You must pay half the business's maintenance cost for each of the days. Profits cover the other half.
41–60	The business covers its own maintenance cost for each of the days.
61–80	The business covers its own maintenance cost for each of the days. It earns a profit of 1d6 × 5 gp.
81–90	The business covers its own maintenance cost for each of the days. It earns a profit of 2d8 × 5 gp.
91 or higher	The business covers its own maintenance cost for each of the days. It earns a profit of 3d10 × 5 gp.

Les règles étant un peu compliquées, on considère des modèles un peu simplifiés.

Modèle sans faillite, gains équilibrés. La taverne a un capital initial de 100 pièces d'or. Tous les mois, soit la taverne rapporte 5 pièces d'or, soit la taverne est en déficit de 5 pièces d'or. Le capital de la taverne augmente ou diminue d'autant à chaque fois. On tire à pile ou face chaque mois pour savoir quelle éventualité arrive. La taverne est autorisée à avoir des dettes arbitrairement grandes sans faire faillite.

Questions. Combien d'argent en moyenne peut-on espérer avoir au bout d'un an ? de 10 ans ? 1000 ans ? Même question si chaque mois, la taverne rapporte 10 pièces ou en perd 5 (toujours avec une chance sur 2). Faire varier les paramètres.

Quelle est la probabilité d'avoir 110 pièces d'or au bout d'un an ? 150 pièces d'or au bout de 10 ans ? Quelle est la probabilité qu'en un an, le capital de la taverne ne passe jamais sous la barre des 100 pièces d'or ? Et pour 10 ans ?

Modèle avec faillite, gains favorables. La taverne a toujours un capital initial de 100 pièces d'or. Chaque mois, soit la taverne rapporte 10 pièces d'or, soit la taverne est en déficit de 5 pièces d'or, avec 50% de chances pour chaque éventualité. Mais si le capital arrive à zéro, la taverne fait faillite, elle ne peut plus regagner d'argent (game over !).

Quelle est la probabilité de faire faillite en 10 ans ? Si on attend assez longtemps, est-ce que la probabilité de faire faillite va s'approcher de 100% ?

En suivant la règle du jeu (non simplifiée). Mêmes question... Combien de jours par an passer dans la taverne pour gagner de l'argent en moyenne au bout de 10 ans ?

Remarques. Souvent, quand on n'arrive pas à calculer une quantité (ce qui est très fréquent), on peut essayer de l'estimer: par exemple, on peut arriver à dire qu'une certaine probabilité est plus petite que 10% sans savoir quelle est sa valeur précise...

2 Pouvez-vous répéter ?

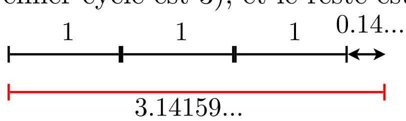
Dans la tribu des *répéteurs*, pour comparer 2 longueurs, 2 durées, ou 2 nombres $a < b$, on regarde combien de fois la petite valeur rentre dans la grande. Par exemple, si $a = 2$, $b = 7$, a rentre 3 fois dans b (et il reste 1). Si $a = 1$ et $b = \pi$, a rentre 3 fois dans b et il reste 0.141592....

Mais les répéteurs ne s'arrêtent pas là (sauf si ça tombait pile...). La quantité b' qui reste étant plus petite que a, on la compare à a de la même manière: on regarde combien de fois b' va dans a. Et on répète le processus à l'infini. Les *cycles* sont les nombres entiers qu'on obtient a chaque étape.

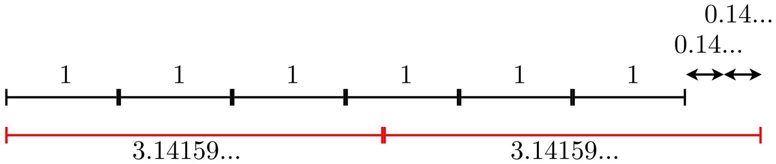
Dans le premier exemple, 2 va 3 fois dans 7, et le reste (=1) va deux fois dans 2, et on s'arrête. Les cycles sont $3, 2$.

Dans le 2eme exemple, $a = 1$, $b = \pi$, le premier cycle est $n_1 = 3$ car 1 va trois fois dans π. Le reste $a' = 0,1415$ va 7 fois dans 1 (car $7 * 0,1415... \simeq 0.9911...$), donc le second cycle est $n_2 = 7$. Le nouveau reste est $b' = 1 - 7 * 0,1415 \simeq 0.00885$ qui est plus petit que $a' = 0,1415...$, et b' va 15 fois dans a' donc le 3e cycle est $n_3 = 15$. Les 3 premiers cycles sont donc $6, 3, 15$.

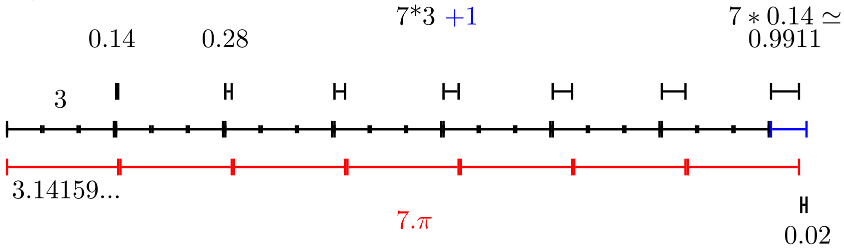
Voici une autre façon de présenter les choses, avec $a = 1, b = \pi \simeq 3.1415...$ D'abord, 1 va 3 fois dans $3,1415..$ (le premier cycle est 3), et le reste est $0,1415$.



Le dessin montre une barre de longueur de π comparée 3 barres de longueur 1, avec l'écart de $0,14..$ Si on met 2 telles figures bout a bout, on obtient le dessin suivant qui montre 2 barres de longueur π relativement a 6 barres de longueur 1, avec un écart de $2 * 0,14 = 0,28$.



Si on fait ça 7 fois, on obtient le dessin suivant, avec l'écart de $7 * 0,1415... = 0,9911$.



En rajoutant une barre (bleue) de longueur 1 aux 7*3=31 barres de longueur 1 présentes, on fait apparaître le nouveau reste 0.00885.

Cet ajout de la barre bleue correspond aux jours qu'on ajoute aux années dans le calendrier (années bissextiles). Si on compare la durée de 1 jour avec 1 an (l'année tropique, qui rythme les saisons), on a $a = 1j$ $b = 365,2421898j$. le premier cycle est $n_1 = 365$ et le reste $b' = 0,2421898$. Le 2e cycle est $n_2 = 4$. Le 2e reste est $1-4*0,2421989 = 0,0312408$. $0,2421898/0,0312408 = 7,75...$ donc le 3ème cycle est $n_3 = 7$. Les cycles sont $365, 4, 7$. On peut s'appuyer là-dessus pour construire un calendrier: les ans ont 365 jours, au bout de 4 ans on rajoute un jour: ce sont les années bissextiles. On répète ce cycle de 4 ans, et tous les 7 cycles (28 ans), on rajoute une année non bissextile. Ça se répète tous les 29 ans avec 7 années bissextiles tous les 29 ans.

Question: pour se chauffer. Supposons que l'année fasse $123 + 456/789$ jours. Quels sont les cycles ? Comment va-t on organiser le calendrier selon ce principe ?

Question 2.1. *Quels sont les nombres a, b tels que le processus s'arrête (c'est à dire qu'à un moment, ça tombe pile) ?*

Si on se donne les cycles $n_1, n_2, n_3, n_4, ...n_k$, existe-t-il toujours des nombres a, b tels qu'on trouve ces entiers là comme cycles ? Et pour une suite infinie ?

Par exemple $1, 1, 1, 1, 1, 1, ...$ *correspond-il à une paire de nombres a, b ?*

Question 2.2. *Si on veut comparer les longueurs du coté d'un carré et de sa diagonale par cette méthode des cycles, que va-t-on trouver ?*

Supposons que l'année fasse $\sqrt{2}$ jours. A quoi ressemblerait le calendrier ?

Et avec $\sqrt{13}$ jours ?

3 Comment bien bluffer

Voici une version modifiée et simplifiée du jeu *Skull and roses.*

La règle est la suivante. Chaque joueur a 2 cartes en main: une carte crâne et une carte rose. Il en choisit une et la pose devant lui face cachée. Ensuite, le premier joueur annonce le nombre de cartes qu'il s'engage à retourner (il ne peut pas passer). Puis chaque joueur doit surenchérir ou passer. Lorsque les enchères sont terminées, le joueur ayant fait la plus forte enchère doit retourner le nombre de cartes qu'il a annoncé, *en commençant par la sienne.* S'il ne retourne que des roses, il a gagné. Si l'une des cartes qu'il retourne est un crâne, il a perdu.

Question générale: comment jouer le mieux possible pour essayer d'optimiser ses chances de gagner.

Pistes. Voici quelques pistes. On pourra peut-être commencer avec 2 joueurs. Il y a probablement beaucoup d'autres façons d'aborder le problème, n'hésitez pas à le prendre autrement. N'hésitez pas à confronter 2 stratégies différentes, et à les faire jouer l'une contre l'autre.

Supposons qu'il n'y a que 2 joueurs.

Vous êtes le premier joueur. Vous savez que les autres joueurs ont tiré leur carte à pile ou face. En supposant que personne ne va surenchérir sur vous, qu'avez vous intérêt à dire ?

Vous êtes le second joueur. En supposant que le 1er joueur a joué selon la 1ère stratégie (qui supposait que vous ne renchérissiez pas), qu'avez-vous intérêt à annoncer ?

Vous êtes le 1er joueur. En supposant que le 2nd joueur va jouer selon la stratégie précédente, qu'avez-vous intérêt a jouer ?

Le 1er joueur adopte la stratégie suivante: il tire a pile ou face la carte qu'il cache. S'il a posé un crâne, il annonce avec une probabilité p_C (30% par exemple) qu'il va retourner une carte (et donc annonce 2 cartes avec probabilité $1 - p_C$, soit 70%), mais s'il a posé une rose, il annonce qu'il va retourner une carte avec une autre probabilité p_R (60% par exemple...).

Connaissant ces probabilités, quelle est la meilleure stratégie pour le 2e joueur ?

Sachant cela, comment le 1er joueur doit il choisir p_C et p_R pour que le 2e joueur ait le moins de chances possibles de gagner ?

Plutôt que de choisir la carte qu'il cache à pile ou face, le 1er joueur peut plus généralement tirer au hasard cette carte mais avec des probabilités differentes: crâne avec une probabilité p_0, et rose avec la probabilité complémentaire. Quelle valeur de p_0 a-t-il intérêt à choisir ?

4 Rigide ou déformable ?

Si on assemble un certain nombre de barres rigides entre elles à leurs extrémités, on peut obtenir une structure rigide ou déformable: si 3 barres sont assemblées en triangle, la structure n'est pas déformable. Par contre, si on assemble 4 barres en forme de carré, elle peut se déformer en losange (les barres pivotent librement a leurs extrémités). Si on rajoute une barre dans la diagonale du carré, alors la structure est rigide en tant que structure plane (c'est a dire si les points ne peuvent pas sortir du plan). Par contre, si on autorise la structure a se déformer dans l'espace, elle peut se déformer (on peut tourner un des 2 triangles le long de la diagonale). Si on ajoute une sixième barre le long de la 2eme diagonale, alors la structure devient rigide dans l'espace (les barres sont supposées infiniment fines, on peut les autoriser a se traverser; la contrainte définie par une barre est que la distance entre les 2 points correspondants ne doit pas varier; on peut faire une variante où on ne les autorise pas à se traverser.).

Mathématiquement, l'assemblage est *déformable* (dans le plan ou dans l'espace) si on peut déplacer (continûment) les points (dans le plan ou dans l'espace) de sorte que pour chaque barre, la distance entre ses deux extrémités ne change pas, mais qu'il y a une paire de points dont la distance change.

Questions. On se donne un certain nombre de points dans le plan, et on veut les attacher avec des barres en une structure non déformable dans le plan.

- Quel est le nombre minimal de barres ?
- Est-ce que ce nombre de barres dépend de la position des points ?

- Est-ce que rajouter un ou plusieurs points supplémentaires pourrait permettre d'économiser des barres ?
- Même question en partant de points dans l'espace et en demandant que la structure ne soit pas déformable dans l'espace.
- Même question en partant de points dans le plan et en demandant que la structure ne soit pas déformable dans l'espace.
- Si pour chaque paire de points, on tire a pile ou face si on met une barre ou pas entre ces 2 points. Quelle sera la probabilité d'avoir une structure rigide ?

5 Derniers chiffres des puissances.

Question 1. Quels sont les 3 derniers chiffres de $3^{1000,000,000}$? et de $2^{1000,000,000}$?

Regardons les puissances de 3: 3, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, $3^6 = 729$, $3^7 = 2187$...

On voit que $03, 09, 27, 81, 43, 29...$ apparaissent comme deux derniers chiffres d'une puissance de 3.

Question 5.1.
- *quels sont les chiffres qui terminent une puissance de 3 (c'est a dire qui apparaissent comme chiffre des unités de 3^n pour un certain n) ?*
- *quels sont les nombres a 2 chiffres qui terminent une puissance de 3 ?*
- *quels sont les nombres a 3 chiffres qui terminent une puissance de 3 ?*

A chaque fois, combien y en a-t-il ? Même question pour les puissances de 2.

Fixons un nombre a 3 chiffres a (par exemple $a = 187$). Appelons *multiplicité* de a dans les puissances de 3, le nombre de n tq 3^n se termine par a (c'est peut-etre infini).

Exemple: la multiplicité de 187 est au moins 1 car ce sont les derniers chiffres de 3^7. Celle de 008 est 0 car les puissance de 3 sont impaires.

- Quelles sont les valeurs possibles pour la multiplicité de a dans les puissances de 3: est qu'on peut avoir 1 comme multiplicité ? 2 ? 3 ? ∞ ?
- Même question dans les puissances de 2.

Une question un peu différente. Disons que deux nombres $a, b < 1000$ sont de la même *famille* si ils ont une puissance qui se termine par les 3 même chiffres (c'est à dire a^n et b^m ont les même 3 derniers chiffres pour certains n, m).

Question 5.2. *Combien y a-t-il de familles ?*