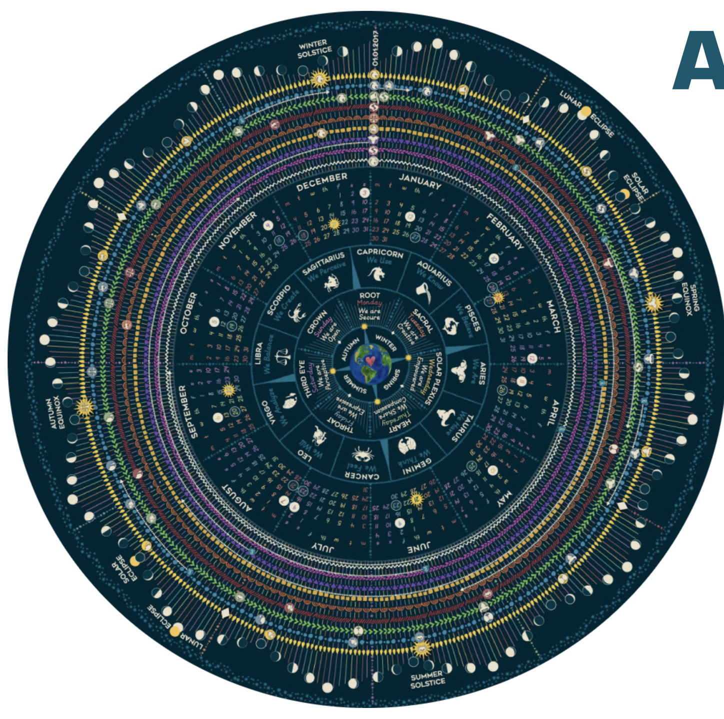
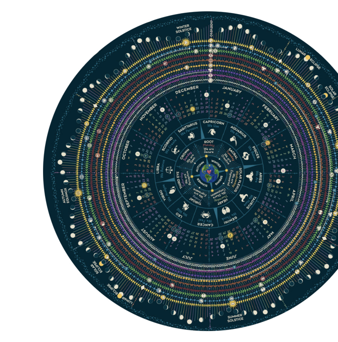


Atelier Mathématique du Lycée Rabelais 2017-2018

LE MYSTERE DES CYCLES



Par Aël RADOVCIC, Emma LOYARD,
Fabien HÉRY, Gautier CAMPAGNE

Une suite de divisions

Soit a_0,a_1 deux nombres réels tels que $0<a_1<a_0$. On regarde combien de fois a_1 va dans a_0. Par exemple c_0 fois et il y a généralement un **reste**, noté a_2. Ainsi

$$a_0=c_0a_1+a_2 \text{ avec } c_0 \text{ un nombre entier strictement positif et } 0 \leq a_2 < a_1.$$

On effectue alors la division entre a_1 et a_2 et on répète ces divisions jusqu'à obtenir un reste nul, si cela se produit, et jusqu'à l'infini sinon. Les quotients entiers c_k sont appelés les **cycles**.

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= c_0a_1+a_2, \text{ avec } c_0 \in \mathbf{N} \text{ et } 0 \leqslant a_2 < a_1 \\ a_1 &= c_1a_2+a_3, \text{ avec } c_1 \in \mathbf{N} \text{ et } 0 \leqslant a_3 < a_2 \\ &\vdots \\ a_k &= c_ka_{k+1}+a_{k+2}, \text{ avec } c_k \in \mathbf{N} \text{ et } 0 \leqslant a_{k+2} < a_{k+1} \end{aligned}}$$

Exemple : $a_0=27$, $a_1=8$. Les cycles sont 3,2,1,2 car $27=3\times8+3 \quad 8=2\times3+2 \quad 3=1\times2+1 \quad 1=2\times1+0$

Présentation sous forme d'une fraction et de cycles

On peut également écrire ces divisions sous la forme d'une suite de fractions, ou les enchainer sous la forme d'une seule fraction avec beaucoup d'étages !

$$\boxed{\frac{a_0}{a_1}=c_0+\cfrac{1}{c_1+\cfrac{1}{c_2+\cfrac{1}{\ddots_{c_{n-1}+\frac{1}{c_n\cdots}}}}}}$$

Nous noterons le **développement de la fraction en cycles** $\frac{a_0}{a_1}=[c_0:c_1:c_2:\cdots:c_n:\cdots]$

Exemple : 27/8 peut donc également se représenter $\frac{27}{8}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}=[3:2:1:2]$

Terminaison des cycles d'un nombre rationnel

Lorsque a_0 et a_1 sont entiers, on reconnaît l'**algorithme d'Euclide**.

Théorème 1 : Le développement en cycles de la fraction a_0/a_1 est fini si et seulement si a_0/a_1 est rationnel.

Développement (infini) en cycles d'un nombre irrationnel

Si x est irrationnel, il a une liste infinie de cycles d'après le **théorème 1**. On note u_n le nombre rationnel correspondant aux n+1 premiers cycles, on l'appelle la **réduite d'ordre n** de x : $u_n=[c_0: c_1: \dots :c_n]$. Comme u_n est un nombre rationnel, il s'écrit également sous forme de fraction $u_n=\frac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers. Comme le passage aux inverses change le sens des inégalités, on a :

Proposition 1 : Soit $c_0, \dots, c_{2n}, c_{2n+1}$ des entiers, alors
- ◈ $t \mapsto [c_0, \dots, c_{2n}, t]$ est décroissante ;
- ◈ $t \mapsto [c_0, \dots, c_{2n+1}, t]$ est croissante.

Corollaire 1 : x est encadré par ses réduites :

$$\boxed{u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq x \leq u_{2n+3} \leq u_{2n+1}}$$

Convergence de la suite des réduites

Pour démontrer la convergence des réduites, nous avons d'abord prouvé par récurrence double que :

Proposition 2 : Pour tout entier k, $p_{k+2}= c_{k+2}\, p_{k+1} +p_k$, $q_{k+2}= c_{k+2}\, q_{k+1} +q_k$ et $p_{k+1}\, q_k - p_k\, q_{k+1} =(-1)^k$

Théorème 2 : Soit x un nombre irrationnel. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. Leur limite commune est x. Par conséquent, la suite des réduite converge vers x.

Nombres avec un développement infini périodique

Théorème 3 : Soit a,b deux entiers naturel non nuls (éventuellement égaux). On note x le nombre irrationnel dont le développement en cycles est : $x=[a:b:a:b: \dots :a:b: \dots]$.

Alors x est solution de l'équation $bx^2 = ab\,x + a$.

Exemples : $\phi=[1:1:1: \dots :1: \dots]$, $\sqrt{2}=[1:2:2: \dots :2 : \dots]$, $\sqrt{3}=[1:1:2: \dots :1:2: \dots]$