

CODAGE DE DROITES

Par Alexia HIDRIO, Nolwenn LE MEHAUTE, Yann TURBE

Comment coder une droite ?

On considère le plan quadrillé et on note $Q = [0,1] \times [0,1]$. Soit D une droite oblique qui rencontre Q .

Quand D rencontre un carreau, on note V, H ou C selon que l'intersection se fait avec une droite verticale, horizontale ou dans un coin.

En partant de Q , on lit un mot infini, c'est le **mot** ou le **codage** de D .

Pour certaines droites, le codage montre un mot périodique. On dit que la **droite D est périodique**.

Unicité du codage

A toute droite, nous savons associer un codage, unique. Mais des droites différentes peuvent-elles avoir le même codage ?

Proposition 1 : Soit D_1 et D_2 deux droites.

- ◆ Si D_1 et D_2 passent par O avec pentes opposées.
 - ◆ Si D_1 et D_2 sont parallèles et passent pas un coin.
- alors D_1 et D_2 ont même codage.

Droites périodiques et pentes rationnelles

Théorème 1 : Soit D_0 une droite passant par O . Alors

- D_0 est périodique ssi D_0 passe par un coin.
- D_0 est périodique ssi D_0 a une pente rationnelle.

Nous avons généralisé le **théorème 1** à toutes les droites D qui rencontrent Q , qu'elles soient issues de l'origine ou pas.

Théorème 2 : Soit D une droite qui rencontre Q . Alors

- D est périodique ssi D a une pente rationnelle.

Continuité du codage

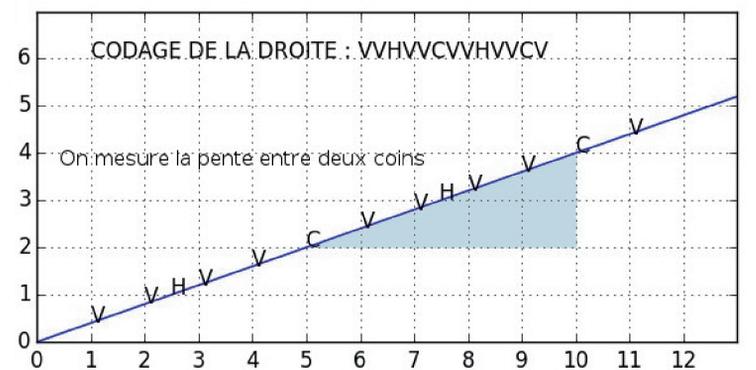
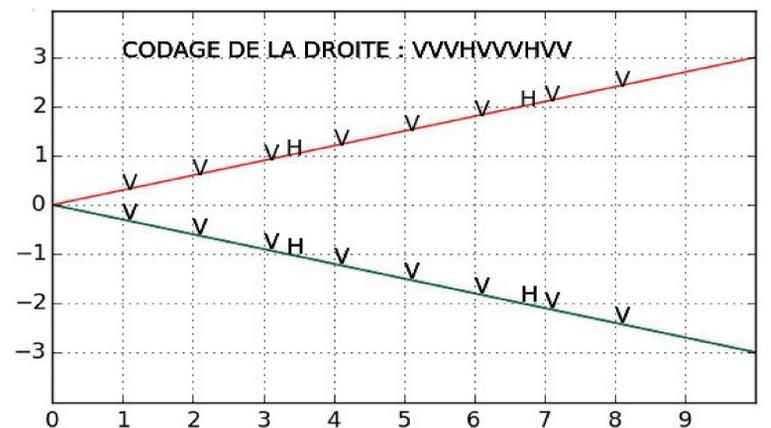
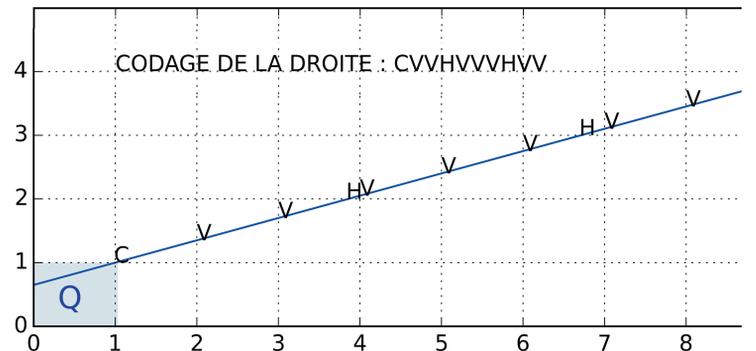
Pour démontrer le **théorème 2**, on se ramène à la parallèle à D passant l'origine. Nous avons établi que les changements de codage entre droites parallèles ne peuvent arriver que lorsqu'on passe par un coin.

Théorème 3 : Théorème du Coin Intermédiaire (TCI)

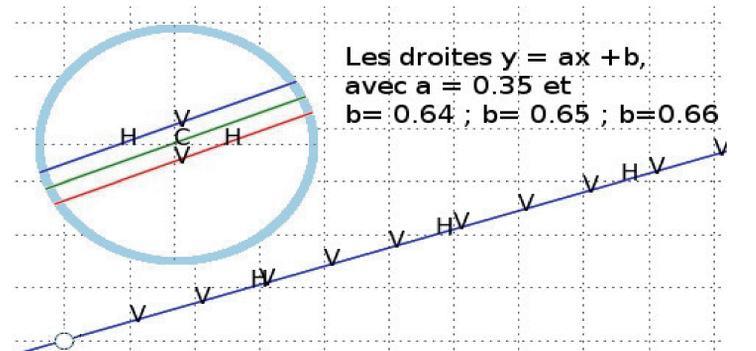
D_1, D_2 des droites parallèles d'ordonnée à l'origine b_1 et b_2 . Si D_1 et D_2 ont des codages différents, il existe $c \in [b_1, b_2]$ tel que la droite D_c parallèle à D_1 et D_2 d'ordonnée à l'origine c passe par un coin.

Corollaire 1 : D_1 et D_2 deux droites parallèles périodiques.

- ◆ Soit D_1 et D_2 ont même mot périodique
- ◆ Soit les mots périodiques de D_1 et D_2 différent de 2 caractères : CC, VH ou HV



Conséquence : une droite ayant une pente irrationnelle a un mot non-périodique.



Exemple : codages des droites $y = ax + b$,
avec $a = 0.35$, $b = 0.64$, $b = 0.65$, $b = 0.66$

VHVVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV
CCVVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV
HV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV VVHV