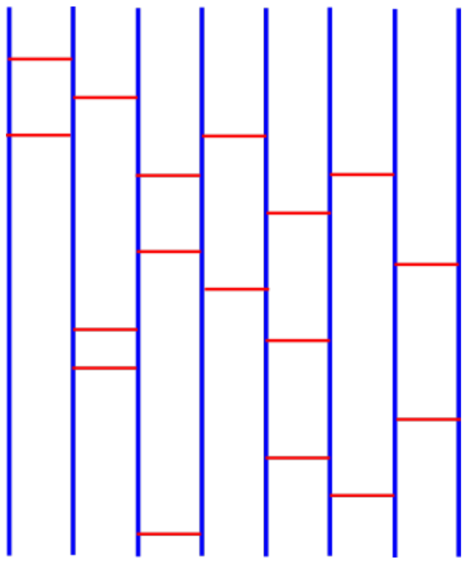
Sujets Maths en Jeans 2016-2017

Proposés par Vincent Guirardel

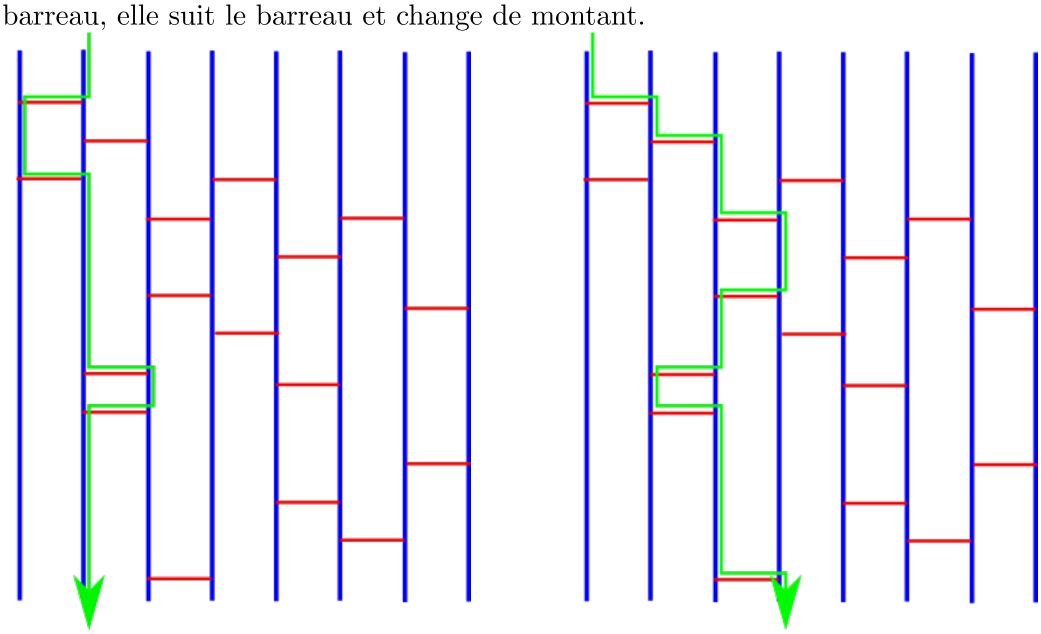
September 19, 2016.
Fichier `2016-2017_02.tex`

1 Echelle pour ranger les cartes

On veut ranger un paquet de 32 cartes, selon un système révolutionnaire: l'échelle à 32 montants.



Une échelle mélange les cartes: les cartes partent du haut. Quand une carte tombe sur un barreau, elle suit le barreau et change de montant.



Question 1.1. *Si on met une carte sur chaque montant en haut, est-ce que 2 cartes peuvent se retrouver au meme endroit en bas ?*

Question 1.2. *Est-ce que les echelles peuvent tout ranger ? Si quelqu'un met une cartes sur chaque montant en haut, Est il possible de mettre des barreaux pour qu'en bas, elles arrivent rangées ?*

Ranger un paquet de cartes, c'est, disons, mettre les cartes dans l'ordre croissant et par couleur: (7,8,9,10,V,D,R,As à trefle puis à carreau, puis coeur puis pique).

Question 1.3. *Si vous n'avez que 10 barreaux à placer sur les montants de l'échelle, pouvez-vous toujours ranger les cartes ?*

Et si vous avez 100, 1000 barreaux ? 1000,000 de barreaux ?

Quel est le nombre minimal de barreaux qui permet de ranger les cartes en toutes circonstances ?

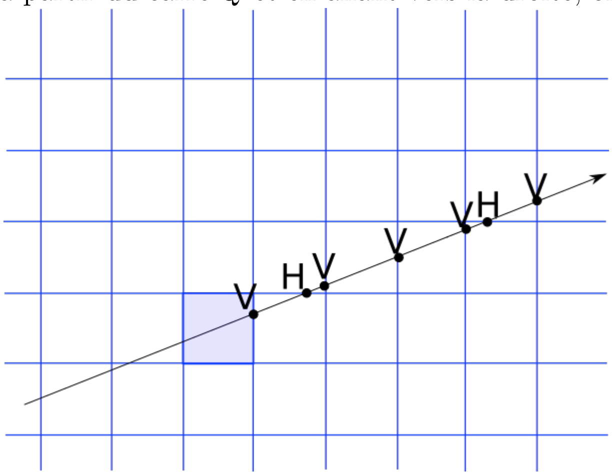
Même question avec un nombre différent de cartes: avec 4 cartes ? 10 cartes ? 52 cartes ? 100 cartes ? N cartes ?

2 Le langage des droites

On considére le plan quadrillé par des droites horizontales et verticales, à distance 1 les une des autres. On fixe un carré Q dans ce quadrillage.

On considère une droite d qui rencontre Q. Supposons que d n'est ni horizontale ni verticale. Chaque fois que d rencontre une droite du quadrillage en un point M, on écrit sur le point M la lettre H, V ou C selon que l'intersection se fait avec un droite horizontale, verticale, ou les deux (un coin).

En commencant à partir du carré Q et en allant vers la droite, on lit un mot infini.



Exemple: Pour la droite ci-dessus, on lit VHVVVHV...

Pour une droite a 45 degrés, on lit VHVHVHVHVHVHVH... C'est un mot périodique.

Question 2.1. *Est-ce que tous les mots infinis obtenus sont périodiques ? Quelles sont les droites qui donnent un mot périodique ?*

Question 2.2. *Est-ce que 2 droites différentes peuvent donner le même mot infini ?*

Est-ce que 2 droites non parallèles peuvent donner le même mot infini ?

Note: tous les mots infinis peuvent pas apparaitre. Par exemple on peut pas voir HHHHVVVV comme sous-mot.

Question 2.3. *Quels sont les mots infinis qui peuvent apparaitre ?*

Quels sont les mots finis qui peuvent apparaitre comme sous-mot ? Par exemple HVVVH apparait comme sous-mot, mais pas HHHHVVVV.

Question 2.4. *Est-ce que certains sous-mots determinent completement le mot infini ?*

Si d est une droite fixée, considérons le nombre de sous-mots de longueur N qui apparaissent comme sous-mot du mot associé à d. Comment se comporte-t-il quand N devient grand ?

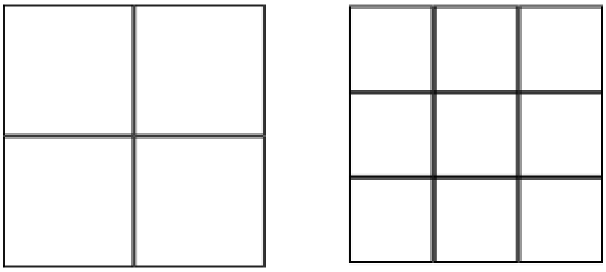
Question 2.5. *Parmi les mots de 10 lettres écrits avec les 3 lettre H, V, C, combien peuvent apparaitre comme sous-mot d'un tel mot infini ? Est-ce une grosse proportion ?*

Meme question avec les mots de N lettres, pour d'autres valeurs de N, pour N tres grand...

Si on ne peut pas determiner ce nombre exactement, peut on minorer ou majorer ce nombre ?

3 Auto-pavages

Definition 3.1. *On dit qu'un polygone C est autopavable si on peut paver C avec un certain nombre de copies de C à une échelle plus petite, toutes de même taille (les pavés sont tous isométriques à un même homothétique de C).*



Exemple: On peut paver un carré par 4 carrés de taille moitié. Un carré est donc autopavable. Ici, le rapport d'échelle est $1/2$.

On peut aussi un pavé un carré par 9 carrés de taille $1/3$, et plus généralement par n^2 carrés de taille $1/n$.

Question 3.2. *Quelles sont les polygones autopavables ? Y-en a-t-il d'autres que le carré ?*

Parmi les polygones reguliers, lesquels sont autopavables ?

Definition 3.3. *Soit C est un polygone autopavable.*

Un nombre $\lambda > 1$ est un rapport d'autopavage de C s'il existe un autopavage de C, de rapport $1/\lambda$.

On a vu que si C est un carré, tous les entiers sont des rapports d'autopavages de C.

Question 3.4. *Le carré a-t-il d'autres rapports d'autopavages ?*

Existe-t-il des polygones C ayant un rapport d'autopavage qui ne soit pas entier ?

Question 3.5. *Y a-t-il des polygones qui sont auto-pavables de rapport n pour tous les entiers n, autres que le carré ?*

Y a-t-il des polygones autopavables autres que le carré qui ont une infinité de rapports d'autopavages ?

Y a-t-il des polygones autopavables qui n'ont qu'un nombre fini de rapports d'autopavages ?

Question 3.6. *Quels sont les nombres réels qui peuvent être des rapports d'autopavages (indépendamment du polygone) ?*

Est-ce que tous les nombres réels > 1 peuvent etre des rapports d'autopavage d'un polygone ?

Est-ce que $2,5$ peut etre un rapport d'autopavage ?

4 Inventer de nouvelles gammes

Renouvelons la musique: inventons de nouvelles gammes.

Rappel: chaque note est caractérisée par un nombre réel positif: sa fréquence. Plus elle est élevée plus la note est aigüe.

L'*écart de hauteur* entre les notes correspond au *rapport* des fréquences. Par exemple: deux notes sont séparées par un *octave* si la fréquence de l'une est le double de l'autre: $f_2 = 2f_1$ Elle sont séparées par 3 octaves si $f_2 = 2 * 2 * 2 * f_1 = 8f_1$.

La gamme tempérée utilisée depuis le XVIe siècle divise l'octave en 12 intervalles égaux (les demi-tons): LA, LA#, SI, DO, DO#, RE, RE#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA. C'est a dire que chacune des 12 notes de la gamme est séparée de la suivante du même intervalle, la dernière note étant une répétition de la première un octave plus haut.

Je vous propose d'essayer de construire d'autres gammes tempérées.

Contraintes imposées:

- Axiome de l'octave: La note finale de la gamme doit être à l'octave de la note initiale (on autorise un nombre entier d'octaves: 1,2,3 voire plus)

- Axiome de symétrie: Comme la gamme tempérée: l'écart entre 2 notes consécutives doit être exactement le même. Ainsi, si vous commencez la gamme par n'importe laquelle des notes, vous entendez la même chose, juste décalé vers l'aigu ou vers le grave.

Pour choisir entre ces gammes, vous voudriez pouvoir jouer votre intervalle préféré exactement, ou sinon le plus près possible.

Par exemple, l'intervalle préféré de Pythagore était 3/2 (la quinte pythagoricienne): comme c'est une fraction formée de petits entiers, deux sons vibrant à des fréquences f_1 et $f_2 = \frac{3}{2}f_1$ sonnent de manière harmonieuse aux oreilles de Pythagore. Dans la gamme tempérée, l'écart entre Do et SOL est proche de $\frac{3}{2}$, mais pas exactement.

Question 4.1. *Parmi les gammes à moins de 12 notes, quelle est la gamme qui a un intervalle le plus proche de* 3/2 *?*

Proposer une gamme ayant le moins de notes possibles, et qui a un intervalle plus proche de 3/2 *que la gamme tempérée.*

Existe-t-il une gamme ayant un intervalle exactement égal à 3/2 *?*

On peut aussi se poser le meme genre de question si votre intervalle préféré est la tierce harmonique 5/4, ou bien 4/3 (quarte), ou autre chose.

Pour se chauffer: quels sont les rapports de fréquences pour la gamme tempérée habituelle ?

Pour aller plus loin: écrire de la musique avec la gamme que vous aurez inventée !

Aspect expérimental Avec un logiciel (audacity...) ou un programme (python...), créer un 1er son qui serait la superposition de 2 notes dont les fréquences sont de rapport 3/2. faire la même chose avec l'intervalle DO-SOL de la gamme tempérée, et écouter la différence. Quelle différence entendez vous ?

On peut le faire avec des sons sinusoidaux, ou des sons qui ne sont pas sinusoidaux, mais superposition de plusieurs harmoniques, c'est à dire la somme de plusieurs sinusoides (4 par exemple) de fréquences $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1$ (en général de moins en moins fortes).

Autre expérience: partons d'une note disons DO. Générer un son qui serait la superposition (c'est a dire la somme) de deux sons sinusoidaux, l'un à la quinte pythagoricienne de ce DO, et l'autre à la quinte dans la gamme tempérée (c'est à dire un SOL). Qu'entendez vous ? Dessiner le graphe de la courbe correspondante.

Expliquer la présence de “battements”.