Sujets Maths en Jeans
Lycée Rabelais de Saint-Brieuc
Lycée Victor et Hélène Basch de Rennes

proposés par Vincent Guirardel
IRMAR, université de Rennes 1

2015-2016

1 Retour a la case départ

Prenons un paquet de cartes. Pour le mélanger, on a beaucoup de possibilités : couper, faire un mélange américain, voire des choses plus compliquées.

Il s'agit d'étudier ce qu'il se passe lorsque, pour mélanger, on répète un certain nombre de fois la même opération de mélange (exactement !).

Par exemple, on peut prendre un paquet de 8 cartes, et décider que pour mélanger, on va couper le paquet en 3+5 cartes, et échanger les deux sous-paquets. Si on répète cela 8 fois, on constate que on retombe sur l'ordre des cartes initial : elles n'ont pas été mélangées du tout !

Si on fait un mélange américain parfait, en 3 mélanges, les cartes retrouvent leur ordre original !

Est-ce que ce phenomene se produit toujours, quel que soit le système de mélange utilisé, aussi compliqué soit-il ?

Problème. *Si on choisit un système de mélange, et qu'on l'applique un certain nombre de fois a un paquet de cartes, va-t-on forcément retomber dans la configuration initiale au bout d'un certain temps ?*

Par exemple, on pourra étudier en particulier les mélanges consistant juste à “couper”. On peut aussi étudier ce qu'il se passe avec peu de cartes (2,3,4,5...).

Si on se donne un système de mélange qui lorsqu'on le répète, ramène les cartes dans leur ordre initial, on appelle *temps de retour* le nombre minimal de répétitions pour que cela se produise.

Problème. *Parmi les systèmes de mélange qui font retomber sur le mélange initial, quel est le temps de retour le plus grand ?*

Ce nombre dépend du nombre n de cartes. On peut commencer par comprendre ce qu'il se passe avec peu de cartes.

Problème. *Pour un jeu de 52 cartes, quel est le temps de retour le plus grand possible ?*

Si on n'arrive pas à le calculer précisément, on peut chercher à le minorer, c'est à dire dire qu'il vaut au moins tant, ou à le majorer (il faut au plus tant)...

2 Nombres infinis

Que se passe-t-il si on regarde des nombres entiers avec un nombre infini de chiffres ? Un nombre entier habituel, par exemple 27, peut s'écrire avec une infinite de zéros :

$$\ldots 00000027$$

Si on s'autorise a avoir une infinité de chiffres à gauche, on obtient des sortes de nombres infinis :

$$\ldots 1111111111, \ldots 12121212121, \ldots 98765432109876543210$$

Les operations d'addition se font comme d'habitude (avec la retenue...). Exemples :

$$\ldots 11111111 + \ldots 2222222222 = \ldots 3333333333$$

$$\ldots 11111119 + \ldots 2222222222 = \ldots 3333333341$$

La retenue se traite comme d'habitude.

On peut aussi faire des multiplications

$$\ldots 11111111 \times 0000000002 = \ldots 2222222222222222222222$$

Attention aux surprises :

$$\ldots 999999999999 + \ldots 00000000000001 = \ldots 0000000000$$

donc $\ldots 99999999999999 = " - 0000000000001"$.

$$\ldots 66666666666666666667 \times \ldots 00003 = 1$$

donc $\ldots 666666666667 = "1/3"$...

Problème. 1. *Comment faire une soustraction ?*

2. *Comment definir une division entre nombres infinis ? Est-ce toujours possible ?*
3. *Tous les nombres infinis sont ils des fractions ?*
4. *tous les nombres infinis sont ils des carrés ? Comment calculer une racine carrée ? Y en a-t-il plusieurs ?*

Pour se chauffer : calculer le carré de $\ldots 11111111111$
peut on trouver des nombres infinis correspondant à $-2, -3, - \ldots 111111111$?
peut on trouver des nombres infinis correspondant à $1/2, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9 \ldots.$?

3 Je numérote, tu choisis.

Commençons par le jeu suivant :

Jeu numero 1. On aligne n cartes sur la table. Sur chacune d'entre elles est inscrit une valeur, visible. Il y a 2 joueurs A, B. Le joueur A choisit une carte à l'une des extrémités et la prend. Puis le joueur B choisit à son tour une carte à l'une des extrémités et la prend. Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cartes. On compte les points en faisant la somme des valeurs des cartes ramassées par chacun, et le gagnant est celui qui a le plus de points (il peut y avoir match nul).

Supposons qu'il y ait un nombre pair de cartes.

Alors, il est facile de voir que celui qui commence peut être sûr de ne pas perdre (il gagne ou fait match nul), quelle que soit la distribution des cartes : il peut en effet s'assurer de prendre soit l'ensemble des cartes en position paire, soit l'ensemble des cartes en position impaire.

Problème. *Que se passe-t-il si n est impair ?*

Jeu numero 2. Maintenant, on modifie le jeu de la facon suivante : le nombre n de cartes est fixé a l'avance, mais avant le début du jeu, le joueur B décide quels nombres il met sur quelles cartes.

Problème. *Le joueur B peut-il s'arranger pour être sûr de gagner (sans faire match nul) ? (la réponse dépend probablement de n).*

Jeu numero 3. C'est le meme jeu, sauf que les n cartes sont disposées en cercle initialement. Le joueur B choisit les nombres à mettre sur les cartes. Au premier coup, le joueur A choisit n'importe laquelle des cartes. Ensuite, le joueur B choisit une des cartes à l'une des extrémités des cartes restantes, puis le joueur A aussi, etc.

Problème. *Dans chacun de ces jeux, pour quelles valeurs de n le joueur B peut-il garantir qu'il va gagner (et ne pas faire match nul) ?*

Ou au contraire, si A joue bien, il peut être sûr de gagner ou de faire au match nul ?

Par exemple, que se passe-t-il pour $n = 3, 4, 5$? pour $n \leq 20$?

On peut aussi considérer des variantes : on peut autoriser des valeurs négatives.

Ou alors, on peut vouloir compenser le fait que le joueur A ait plus de cartes en main a la fin en ajoutant au score du joueur B la moyenne des valeurs des cartes : exemple : s'il y a 3 cartes de valeur $3, 4, 5$ et si A prend $3, 4$ et B prend 5, le score de A est $4 + 4 = 7$, et celui de B est $5 + moyenne(3, 4, 5) = 5 + 4 = 9$ (B a donc gagne).

4 Garer sa voiture

Pas toujours facile de garer sa voiture. Ici, il s'agira d'une voiture à pédale, et sans direction assistée ! [1] Ca veut dire qu'il faut faire un effort pour avancer, mais il faut aussi faire un effort pour tourner le volant ! Si les roues sont orientées « tout droit », il faut dépenser de l'énergie pour faire tourner le volant et orienter les roues vers la gauche (ou la droite).

Si le volant ne bouge plus, la voiture suit une droite (si les roues sont dans l'axe) ou un cercle de rayon R. On definint la *courbure* du cercle comme $C = \pm 1/R$, avec un signe positif si on tourne à gauche, et négatif si on tourne à droite. (la droite etant de courbure nulle).

Si on ne bouge pas le volant, disons qu'il coûte un prix (ou un effort, ou une energie) $p = d$ pour avancer de d mètres le long de la droite ou du cercle. [2] Disons qu'il coûte un un prix $p = |C - C'|$ pour faire tourner le volant de façon à faire passer la courbure de C à C' (sans avancer).

[3]

Problème. *Comment faire demi-tour pour le moins cher possible ?*

Estimer le coût minimal d'un demi-tour.

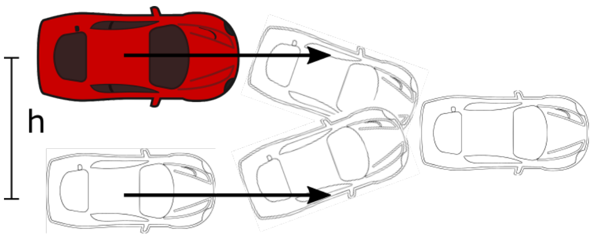
Il s'agit d'amener la voiture au meme endroit, mais dans la direction opposée. On pourra essayer d'obtenir des bornes inférieures (on ne peut pas faire de demi-tour pour un prix inférieur à tant...) ou des bornes inférieures : en faisant comme cela, on arrive à un coût de tant, donc le coût minimal est au plus égal à tant...

1. Ou alors, on compte l'energie necessaire au moteur pour faire tourner le volant !
2. Il n'y a pas d'inertie, on ne profite pas de l'élan...
3. Si on tourne le volant en avançant (en spirale !), on peut combiner les 2 prix en les additionnant : pour un petit déplacement de la voiture sur une distance d, et une rotation simultanée du volant entre la courbure C et C', on obtient un prix $p = |C - C'| + d$. Une autre possibilité pour combiner les prix (mais qui ne donne pas exactement les memes resultats) utilise la formule $\sqrt{(C - C')^2 + d^2}$.

On peut se poser les mêmes questions pour un quart de tour, ou pour un angle variable θ, et regarder le comportement de ce coût lorsque θ tend vers 0 : va-t-il tendre vers 0 ? A quelle vitesse ? va-t-il décroitre linéairement avec θ ?

Variante : peut-être que le coût de tourner le volant semble trop important. On pourrait le changer en $p = \lambda|C - C'|$ pour un certain λ. Comment cela influence-t-il le coût minimal d'un demi-tour ?

Un autre problème consiste à faire un créneau, toujours en se fatigant le moins possible. On se place dans l'hypothèse ou on n'est pas gêné par d'autres voitures. Il s'agit donc d'aller d'un point A à un point B, en arrivant au point B avec la meme direction que la direction initiale.



Problème. *Comment faire un créneau pour le moins cher possible ?*

Comment varie le coût du créneau lorsque la distance h entre la position d'arrivée et de départ varie ?

5 Casse briques

On joue à un casse brique : la balle rebondit contre les murs, et lorsqu'elle touche une brique, la brique est détruite. Notre jeu est un peu spécial : on suppose que la balle rebondit aussi sur le sol : elle rebondit donc indéfiniment ! Le rôle du joueur se cantonne donc à choisir la position initiale et la direction du lancer, il n'intervient plus après ! On suppose aussi que la hauteur du mur de briques est infinie, mais de largeur finie, disons de l briques.

On lance la balle a partir d'un certain endroit, et dans une certaine direction, et on la laisse rebondir, à l'infini. On supposera que la balle est ponctuelle, et que les rebonds sont donnés par les lois de réflexion habituelles, et que la balle se déplace en ligne droite, vitesse constante. [4]

Si on lance la balle verticalement, elle va garder sa direction verticlale au cours du temps, et seules les briques dans la colonne traversée par la balle vont disparaitre. Donc on peut dire que, *au bout d'un temps infini*, il restera encore des briques...

On peut imaginer que si on lance la balle dans une autre direction, toutes les briques vont finir par disparaitre...

Problème. *Pour quelles directions et quelles positions initiales est-ce que la balle va détruire toutes les briques ? Ou au contraire, pour quelles directions et positions est-ce que certaines briques ne seront jamais détruites ?*

Est-ce que ce comportement peut changer si on change la position initiale sans changer la direction ?

Dans certaines situations, on peut voir périodiquement la même « configuration » (à préciser) se répéter. Il faudrait comprendre quand est-ce que ca arrive.

Problème. *Pour quelles directions et positions initiales arrive-t-on à une situation périodique ? En quel sens ?*

Au cours du temps, on peut regarder la différence de hauteurs H entre la brique la plus basse qu'il reste, et la brique brisée la plus haute. Par exemple, si la balle est lancée verticalement (et si le terrain a une largeur l d'au moins 2 briques !), après n briques brisées, H vaut $n-1$. En particulier, H tend vers l'infini.

Problème. *Pour quelles directions et positions initiales H tend vers l'infini ? est borné ?*

H peut-il osciller entre des valeurs très grandes (qui tendent vers l'infini) et des valeurs bornées ?

Variantes : on peut expérimenter d'autres formes de terrains : infini en largeur, ou alors infini dans toutes les directions (le plan est rempli de briques, il manque juste une brique au milieu dans laquelle se place la balle)...

4. Si la balle touche le coin d'une brique, son rebond n'est pas vraiment défini, et elle peut toucher plusieurs briques a la fois : on ignorera ce genre de comportement « exceptionnel »...