Atelier Mathématique du Lycée Rabelais 2015 - 2016

NOMBRES INFINIS

Par Alexis SANTORO, Anthonin MARTINEL, Coralien PINCK, Quentin DEPORTEERE

Les règles du jeu

Les nombres entiers naturels s'écrivent avec un nombre fini de chiffres. Que se passe-t-il si on considère des entiers avec une infinité de chiffres ? L'ensemble $\mathbb{I}$ de ces "nombres infinis" contient l'ensemble des entiers naturels, puisqu'on peut écrire par exemple $48 = \cdots 000048$.

Les opérations d'addition, de multiplication entre nombres infinis se font comme d'habitude (avec des retenues), pourtant l'ensemble $\mathbb{I}$ réserve quelques surprises !

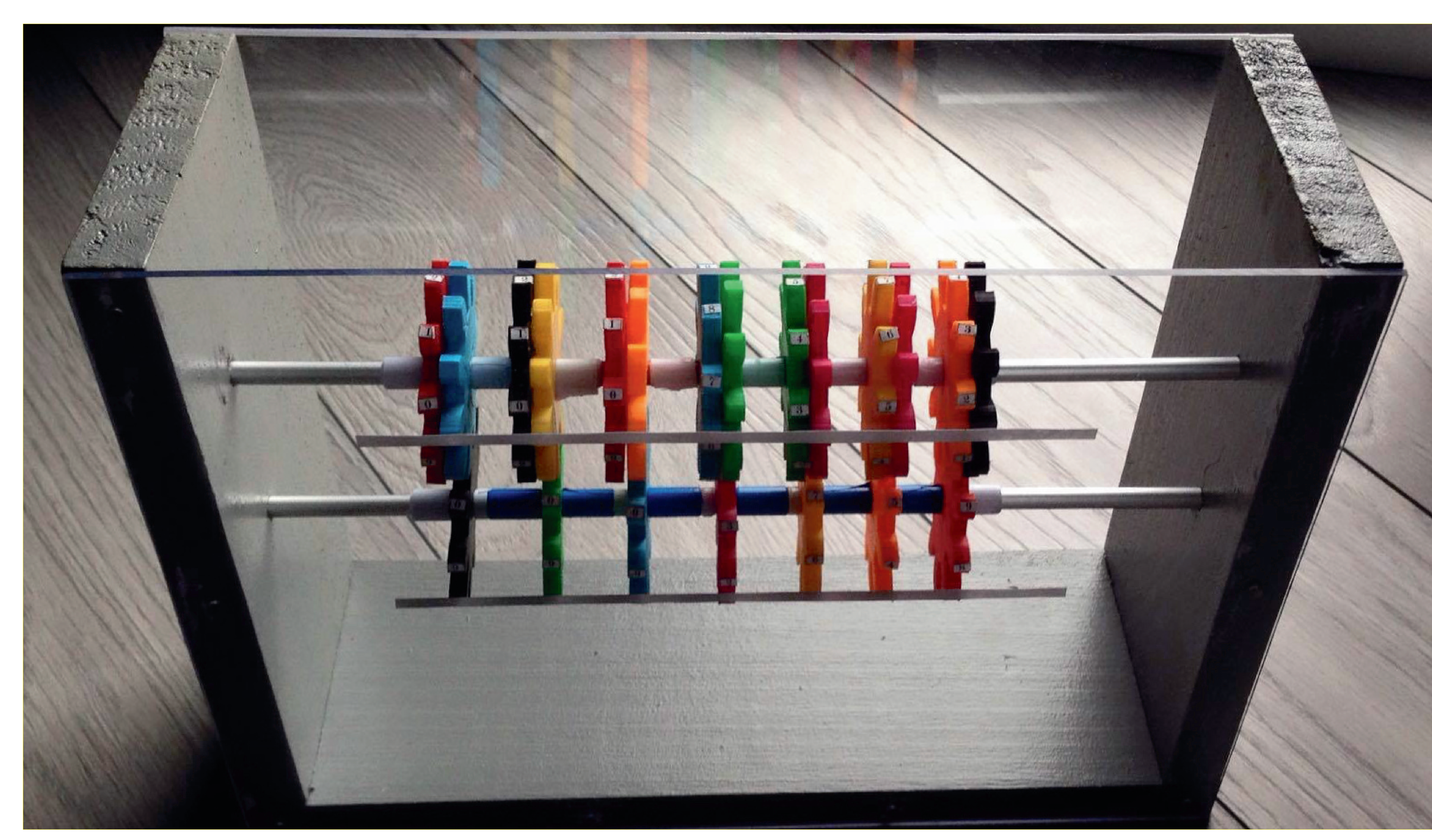
Notation : dans la suite, nous noterons P=[abcd] la partie périodique d'un nombre infini.

Propriétés de l'addition dans $\mathbb{I}$

On remarque qu'en ajoutant 1 au nombre infini [9], on obtient 0=[0]. Ainsi, -1 appartient à $\mathbb{I}$. Cet ensemble contient donc des entiers négatifs. Plus précisément:

Théorème 1 : Tout entier naturel a un opposé dans $\mathbb{I}$.
Soit $x \in \mathbb{N}$ un entier de n chiffres. Alors
$x' = [9]*10^n + 10^n - x$ est le nombre infini opposé à x.

Remarque : il est toujours possible de prendre l'opposé d'un nombre infini, il suffit d'appliquer un complément à 10 sur le premier chiffre non nul puis un complément à 9 sur les suivants.



C'est le **principe de fonctionnement** de notre **machine à calculer les opposés ci-dessus.**

Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{I}$

Comme un entier naturel possède un opposé dans $\mathbb{I}$, on s'intéresse naturellement à l'existence d'inverse.

Théorème 2 : Soit $x \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Alors x est inversible dans $\mathbb{I}$ si et seulement si son chiffre des unités est 1,3,7 ou 9.
En ce cas, l'inverse infini de x est unique.

Le théorème 2 ne permet pas le calcul pratique de l'inverse infini d'un entier. On utilise pour cela le théorème 3.

Théorème 3 : Soit $x \in \mathbb{N}$ tel que $x \equiv 1,3,7,9$ [10].
Alors l'inverse de x dans $\mathbb{Q}$ admet un développement périodique :

$$\boxed{\frac{1}{x} = 0,[p_1p_2\cdots p_\ell]\,[p_1p_2\cdots p_\ell]\cdots = 0,[P]}$$

L'inverse infini de x est l'opposé dans $\mathbb{I}$ de [P].

Exemple : calculons l'inverse de n=37 dans $\mathbb{I}$.

$$\frac{1}{37} = 0,027\,027\,027 = 0,[027]$$

On calcule alors l'opposé du nombre infini A= [027].
L'inverse de 37 dans $\mathbb{I}$ est le nombre infini périodique [297]3.

Nombres infinis périodiques et nombres rationnels

Dans l'ensemble $\mathbb{I}$, tous les nombres entiers naturels, les entiers relatifs ainsi que les inverses des entiers inversibles sont infinis périodiques. Inversement, on a :

Théorème 4 : Tout infini périodique est rationnel.
Si X est le nombre infini X=[P]A, alors

$$\boxed{X = \frac{A(1-10^\ell) + P \times 10^k}{1-10^\ell}}$$

où l est la longueur de la partie périodique P, k celle de la partie apériodique A.

Exemple : soit X=[42319]42. P= 42319, A= 42, l= 5 et k= 2.

$$X = \frac{42(1-10^5) + 42319 \times 10^2}{1-10^5} = -\frac{31942}{99999}$$

Théorème 5 : dans $\mathbb{I}$, les nombres infinis périodiques correspondent aux fractions p/q où q a pour chiffre des unités 1, 3, 7 ou 9.