Sujets Maths en Jeans
Lycée Rabelais de Saint-Brieuc

Vincent Guirardel

2014-2015

1 Colorier le plan

On veut colorier le plan avec un certain nombre de couleurs. La contrainte est la suivante : si deux points sont à distance exactement égale à 1, alors ces deux points doivent être de couleurs différentes.

Problème. *Quel est le nombre minimal de couleurs permettant de colorier le plan (en entier) en respectant cette contrainte ?*

La situation idéale est celle où on a trouvé un coloriage avec n couleurs, et demontré qu'on ne peut pas colorier avec moins de n couleurs. Souvent, on n'arrive pas a cette situation idéale et on essaye de s'en approcher en mélangeant 2 approches :
- Trouver des coloriages du plan avec le moins de couleurs possibles et qui satisfont la contrainte
- Démontrer qu'il est impossible de colorier le plan en respectant la contrainte, et avec moins qu'un certain nombre de couleurs.

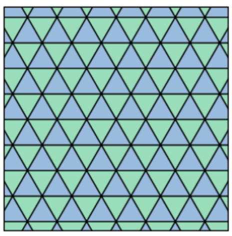
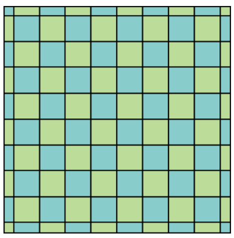
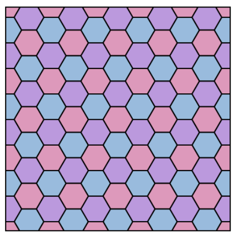
2 Paver le plan avec des polygones

Considérons un polygone donné. La question générale est la suivante :

Peut-on paver le plan avec des copies de ce polygone ?

Dire que ces polygones pavent le plan signifie que le plan est entièrement recouvert (pas d'espace libre !), et que deux polygones ne se touchent que par leur bord. Toutes les copies sont obtenues à partir de la forme initiale en la déplacant et en la tournant (on pourrait penser à une variante dans laquelle on a aussi le droit à une symétrie miroir, mais ici on se l'interdit).

Il y a des pavages bien connus par des polygones réguliers : triangle équilateral, carré, hexagone :

Que se passe-t-il si on autorise des polygones non réguliers ?

Problème. *Quels sont les polygones convexes avec lesquels on peut paver le plan ?*

On peut subdiviser la question en 2 :

Question 2.1. *Quelles sont les valeurs de n telles qu'on peut paver le plan avec des copies d'un même n-gone ?*

Par exemple, on sait qu'on peut paver le plan avec des triangles, des quadrilatères et des hexagones. Peut-on le paver avec des pentagones ? avec des heptagones ? des octogones ?

Ensuite, on peut fixer le nombre n de côtés, et se demander quelles sont les formes possibles des n-gones qui pavent le plan.

Question 2.2. *1. Quels sont les triangles avec lesquels on peut paver le plan ?*

2. Quels sont les quadrilatères (convexes) avec lesquels on peut paver le plan ?

3. Quels sont les pentagones (convexes) avec lesquels on peut paver le plan ?

4. Meme question avec les hexagones, heptagones, octogones, etc.

Le cas des triangle est une bonne question pour se chauffer.

La question de la *rigidité* se pose aussi : peut-on déformer un pavage donné pour obtenir un nouveau pavage ?

3 Saute-mouton

Une bergerie a une forme rectangulaire, quadrillée en $n \times m$ cases. Sur chacune des cases se trouve un moutons sauf sur une où il y a un chien de berger (il n'y a donc pas de case vide !).

Donnons un nom à chaque mouton a un nom : Artiche , Brindille, Coton, Douillet, Elegance... (ou un numéro...). Appelons le chien Zéphyr.

Chacun a une place dans la bergerie, dans l'ordre alphabétique, le chien dans le coin en bas a droite.

A	B	C
D	E	F
G	H	Z

Le soir, tous les moutons sont dans le désordre, et le travail du chien consiste à ramener chacun à sa place.

Pour cela, il a une seule technique à sa disposition : jouer à saute mouton avec un mouton adjacent (pas en diagonale), ce qui fait qu'ils échangent tous les deux leur place. Ainsi, dans la situation ci-dessous, Zéphyr peut échanger sa place avec Brindille, puis avec Douillet :

G	A	D
H	**Z**	**B**
C	E	F

→

G	A	**D**
H	**B**	**Z**
C	E	F

→

G	A	**Z**
H	B	**D**
C	E	F

Problème. *Si les moutons sont dans une position quelconque au début, est-ce que le chien peut toujours ramener tout le monde à sa place ?*

Ou au contraire y a-t-il des positions initiales des moutons et du chien qui font que ce travail est impossible ?

Bien sûr, la réponse pourrait dépendre de la taille de la bergerie. Donc la question serait plutôt : pour quelles valeurs de n, m le travail du chien est-il toujours possible ?

On peut même demander plus. Supposons qu'on dispose les moutons et le chien au hasard, et on veut parier sur le fait que le chien peut ramener chacun à sa place. On vous propose de miser 1 sou. Vous perdez la mise si la mission du chien est impossible, et vous gagnez x sous sinon. A partir de quelle valeur de x accepteriez vous de jouer ?

Là aussi, x peut dependre de n, m.

On peut envisager des variantes : par exemple avec 2 chiens. Est-ce que c'est plus facile ?

4 Calculer des puissances

Problème. *Etant donné un nombre a arbitraire, comment calculer a^n en faisant le moins de multiplications possible ?*

Par exemple, pour calculer a^8 : on peut faire $a * a * a * a * a * a * a * a * a$, c'est a dire 7 multiplications. C'est la méthode "naïve". Mais on peut faire mieux : calculer d'abord $b = a{*}a$, puis $c = b{*}b$ (donc $c = a^4$), puis $d = c{*}c$, (donc $d = a^8$). Ça fait 3 multiplications.

Autre exemple : pour calculer a^9, on peut faire bêtement 8 multiplications (méthode naïve), ou alors calculer a^8 en 3 multiplications comme au-dessus, puis multiplier par a. Ca fait donc 4 multiplications. On peut aussi calculer $b = a * a * a$ (2 multiplications), puis $c = b * b * b$ (2 autres multiplications), pour un total de 4 multiplications.

On peut préciser le problème en posant deux questions.

1. Trouver des méthodes *systématiques*, plus efficaces que la méthode naïve. Comparer ces methodes. On pourra aussi programmer ces méthodes.
2. Pour certaines valeurs de n, chercher une facon OPTIMALE, c'est a dire telle qu'on ne peut pas faire mieux (toujours en termes de nombre de multiplications).

Par exemple, on a vu qu'on peut calculer a^9 en 4 multiplications. Peut-on faire mieux ?

Si vous avez une méthode systématique, pour quelles valeurs de n cette méthode donne-t-elle le calcul optimal ? Pouvez-vous trouver une méthode systématique qui donne *toujours* le nombre de multiplications optimal ?

5 Numération bizarre

On se propose d'écrire les nombres sous la forme suivante : en base 3, et seulement avec les chiffres $0, 1$ et 6. Par exemple, l'écriture *601161* représente le nombre

$$6 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^1 + 1$$

Il est donc interdit d'utiliser les chiffres 2, 3, 4, 5, 7,8,9 dans cette écriture.

Certains nombres ne peuvent pas s'écrire dans ce système de numération (2 par exemple !).

D'autres nombres peuvent s'écrire de plusieurs façons : c'est le cas de 9 qui s'écrit à la fois *16* et *100*.

Question 5.1. *Quels sont les nombres qui peuvent s'écrire avec ce système de numération ?*

Combien y en a-t-il qui soient inférieurs à 3^{10} ? Quelle est la proportion des nombres entre 1 et N qu'on peut écrire sous cette forme ? Quelle est la limite de cette proportion quand $N \to \infty$?

Question 5.2. *Combien d'écritures peut avoir un nombre donné ?*

Comment peut-on passer d'une écriture à une autre ?

Question 5.3. *Y a-t-il une règle qu'on peut rajouter au système d'écriture pour que*
- *tous les nombres qui peuvent s'écrire dans ce système de numération peuvent encore s'écrire en respectant cette règle supplémentaire ?*
- *chaque nombre ne peut s'écrire que d'une seule façon dans le système de numération en respectant cette règle supplémentaire.*

Question reliée : on considère les nombres réels qui peuvent s'écrire de façon analogue. Par exemple, $0, 601161...$ (avec une infinité de chiffres cette fois) représente le nombre réel

$$6 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3^2} + 1 \cdot \frac{1}{3^3} + 1 \cdot \frac{1}{3^4} + 6 \cdot \frac{1}{3^5} + 1\frac{1}{3^6} + \cdots$$

On peut se poser des questions analogues. Combien de représentations un nombre réel peut-il avoir ? Quels sont les nombres réels qu'on peut écrire de cette façon ?