

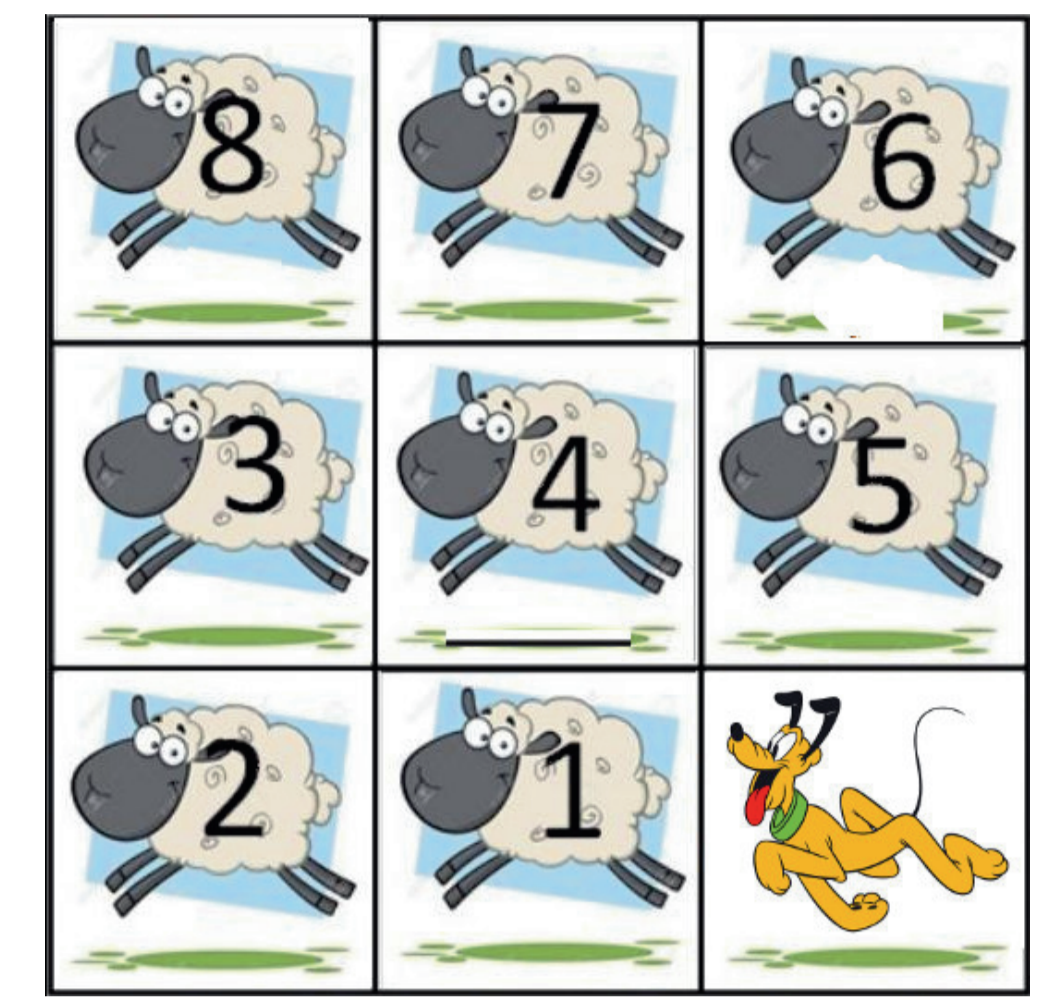


LE MOUTON-TAQUIN

Par Alexandre DEMANGE, Axel MÉTAIS, Nicolas VAN POUCKE, Anaël YAHI

Les règles du jeu

Une bergerie a une forme rectangulaire de n lignes et m colonnes. Sur chaque case se trouve un mouton unique (numéroté) sauf sur la dernière case où il y a un chien de berger (noté Z). Les moutons sont rangés dans un ordre en « serpentín » en partant de la fin de la grille. Le soir, tous les moutons sont rangés dans le désordre, et le travail du chien consiste à les ramener chacun à sa place. Pour cela, une seule technique à sa disposition : jouer à saute-mouton avec un mouton adjacent (pas en diagonale), ce qui fait qu'ils échangent tous les deux leur place.



Problématique

Si les moutons sont dans une position quelconque au début, est-ce que le chien peut toujours ramener tout le monde à sa place ? Au contraire y a-t-il des positions initiales des moutons qui font que cela est impossible ?

Approche du problème

8	7	...	2	1	Z
---	---	-----	---	---	---

cas $n=1$

2	3
1	Z

cas $m=n=2$

5	4
Z	3
2	1

cas $m=2, n=3$

Un peu de vocabulaire :

Une **transposition** correspond à l'échange de deux cases, pas nécessairement adjacentes.

Une **permutation** est une succession de transpositions.

Une **action du chien** correspond à l'ensemble des transpositions que celui-ci réalise en partant de sa case pour se déplacer dans la bergerie et revenir à cette même case.

Lorsque chaque mouton est dans la case de même numéro, la situation est rangée selon l'**identité**.

Le rôle déterminant de la parité

Comme il revient en position initiale, une action du chien est toujours composée d'un nombre pair de déplacements.

La bonne idée ! un mouvement du chien est toujours constitué d'un nombre pair de transpositions, tandis qu'en général une permutation se décompose en un nombre fini, pair ou impair de transpositions.

Nos résultats

Proposition : on considère trois cases successives de la grille $i, i+1, i+2$ situés en angle ou en ligne.

La permutation $i \rightarrow i+1 \rightarrow i+2 \rightarrow i$ est une action du chien.

i	$i+1$	$i+2$
-----	-------	-------

$i+1$	$i+2$
-------	-------

i

Théorème : on définit σ comme la succession des transpositions effectuées pour déranger les moutons.

- ▶ si σ est paire, le chien peut ranger les moutons ;
- ▶ si σ est impaire, le chien ne peut pas ranger les moutons.

