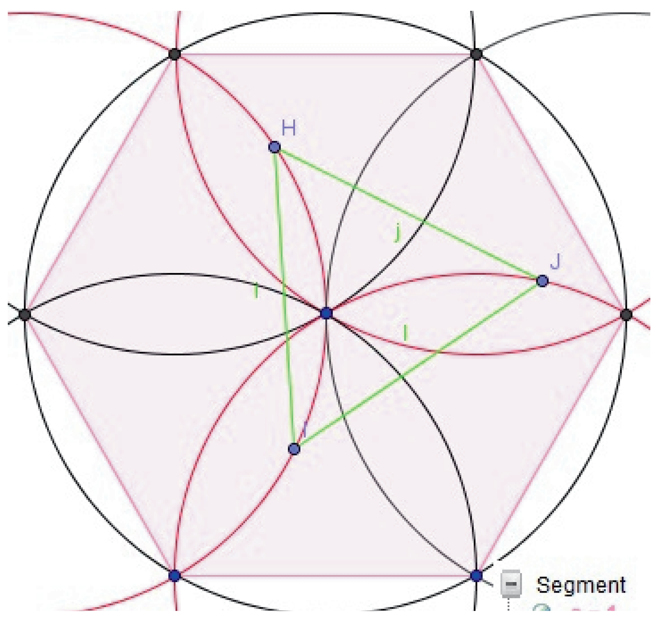
Atelier Mathématique du Lycée Rabelais 2014 - 2015

COLORIAGE DU PLAN

Par Alexandre ADAM, Théo BEAUMANOIR, Sylvan LE DEUNFF

Les règles du jeu

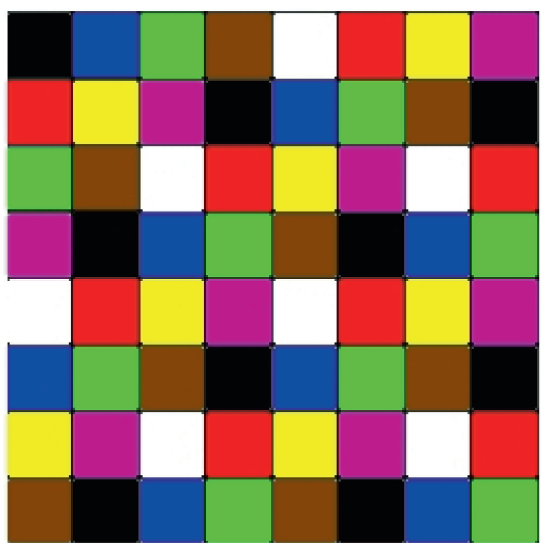


Nous cherchons les coloriages du plan pour lesquels deux points situés à une distance de l'unité ne sont jamais de la même couleur !

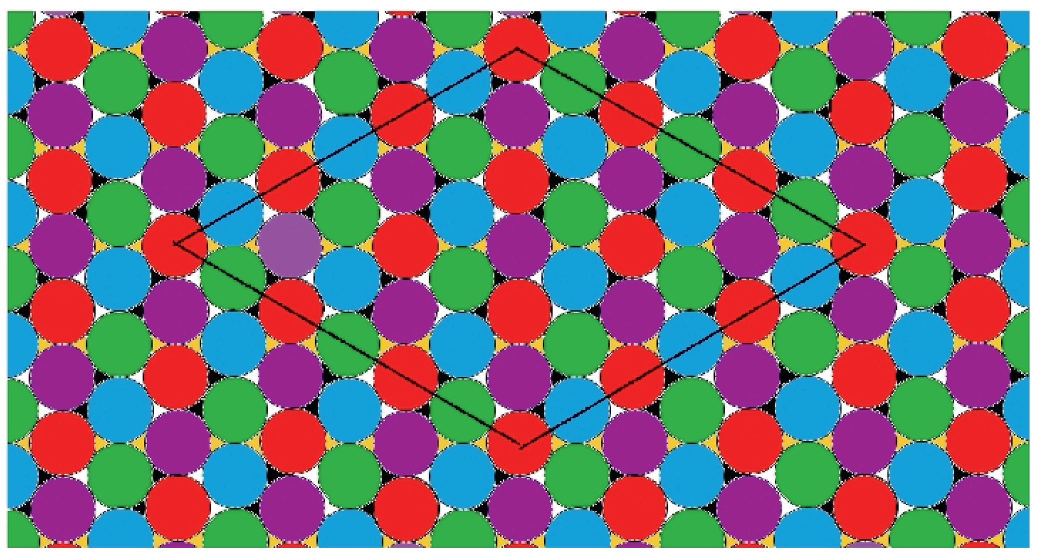
Nous cherchons à déterminer de tels coloriages avec un nombre minimal *m* de couleurs différentes.

Majoration du nombre minimal de couleurs

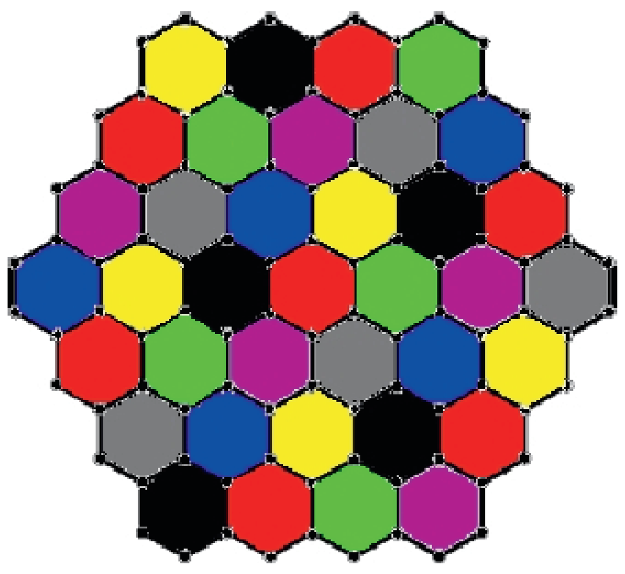
Les exemples de coloriages que nous avons obtenus montrent qu'il est possible de colorier le plan avec sept couleurs.



coloriage en 8 couleurs



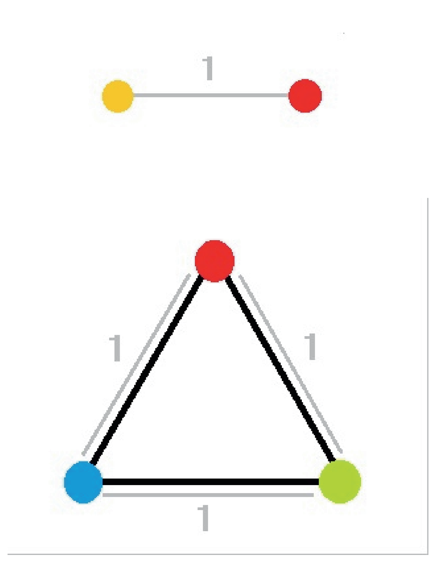
coloriage en 7 couleurs



coloriage en 7 couleurs

Minoration du nombre minimal de couleurs

Les schémas ci-contre montrent l'impossibilité de colorier le plan avec moins de trois couleurs.



Encadrement

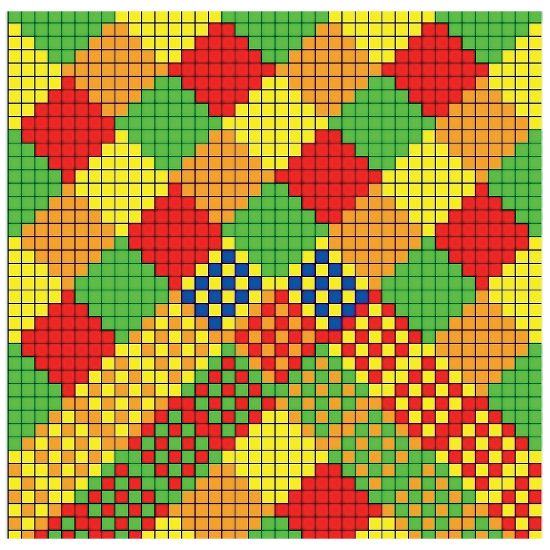
Nous avons aussi montré qu'il était impossible de colorier avec seulement trois couleurs. Ainsi

Théorème 1: le nombre minimal de couleurs m nécessaires pour colorier le plan vérifie

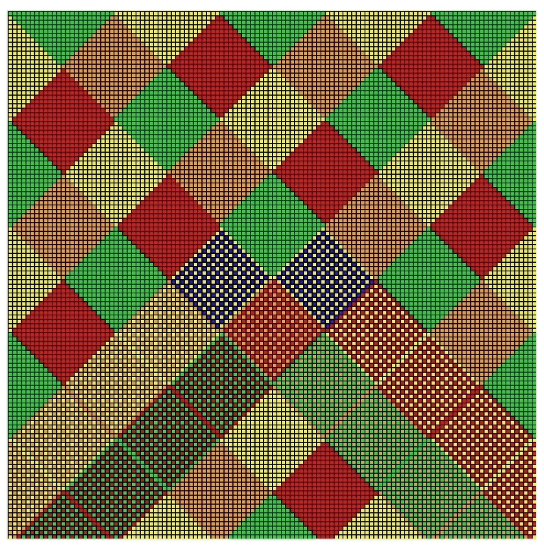
$$4 \leq m \leq 7$$

Modélisation informatique

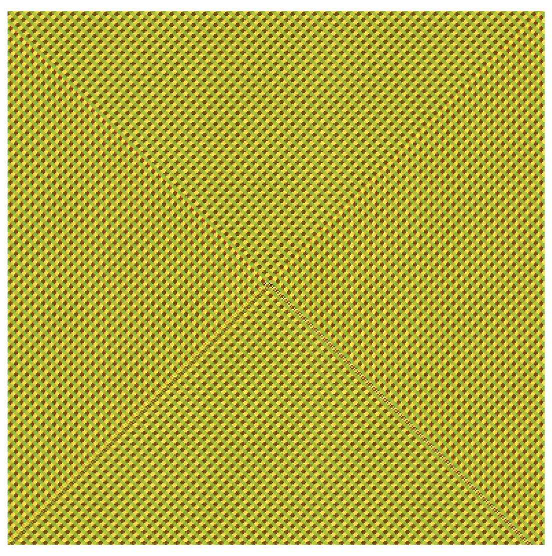
Nous avons modélisé le plan sous forme pixelisée (un pixel étant une unité graphique monochrome). La distance entre deux pixels est le nombre de pixels les séparant. Nous avons créé un algorithme qui colorie avec un minimum de couleurs possible le plan pixelisé. Quelques résultats obtenus en faisant varier la largeur du pixel c.



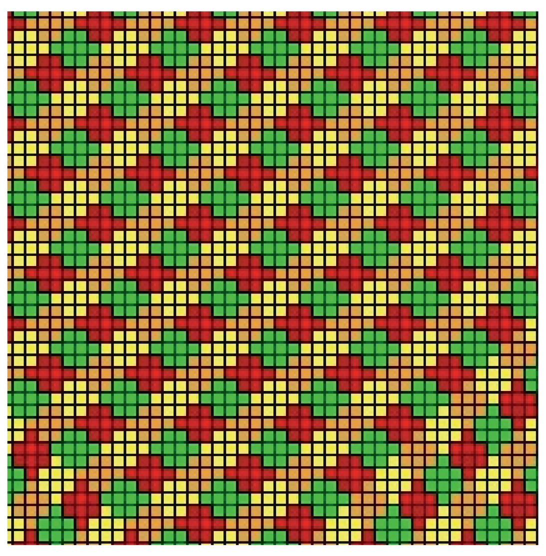
largeur c = 1/8



largeur c=1/24



largeur c=1/800



c = 1/800 détail

La distance ABELienne

Lorsqu'on diminue la taille de nos pixels, on n'obtient pas la **distance euclidienne**, mais une autre distance entre les points du plan que nous avons appelé la **distance abelienne**.

Définition : soit $A_1 = (x_1,y_1)$ et $A_2=(x_2,y_2)$.
La distance abelienne de A_1 à A_2 est

$$da(A_1,A_2)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$$

Théorème 2: lorsqu'on mesure la distance entre des points du plan à l'aide de la distance abélienne, le nombre minimal de couleurs m nécessaires pour colorier le plan est m=4.