Atelier Mathématique du Lycée Rabelais 2014 - 2015

LA BASE BIZARRE

Par Erwan BOSCHER, Guillaume LE BOUCHER, Louis LE DAMANY

Les règles du jeu

En base 3, tout entier N s'écrit, de façon unique, comme somme $N=a_k\ 3^k + \dots + a_2 3^2 + a_1 3^1 + a_0 3^0$, avec les chiffres a_i égaux à 0,1 ou 2. On note $N=(a_k \dots a_2 a_1 a_0)_3$.

Dans le cadre de nos recherches, nous nous intéressons au codage en base 3 mais en prenant comme chiffres possibles non plus 0,1 et 2 mais 0,1 ou 6 !

On décode aisément un nombre présenté en écriture bizarre : $(a_k \dots a_2 a_1 a_0)_{bb} = a_k\ 3^k + \dots + a_2 3^2 + a_1 3^1 + a_0 3^0$.

Exemple : décodons l'entier $(10616)_{bb}$

$(10616)bb = 1\ 3^4 + 0\ 3^3 + 6\ 3^2 + 1\ 3^1 + 6\ 3^0 = 144$

Problématique : existence et unicité du codage en base bizarre

Tous les entiers naturels N sont-ils codables en base bizarre ? Y a -t'il unicité de l'écriture en base bizarre ?

Existence d'un codage

Théorème 1 : l'entier N est non codable en base bizarre

- ► si son écriture en base 3 se termine par $(2)_3$;
- ► si son écriture en base 3 se termine par $(21)_3$ ou $(210)_3$;
- ► si son écriture en base 3 contient le motif $(211)_3$ ou $(212)_3$.

Conséquence : tous les nombres ne sont pas codables. Impossible par exemple de coder 2 ou 5 puisqu'ils sont congrus à 2 modulo 3.

Unicité du codage

Théorème 2 : l'écriture en base bizarre n'est pas unique. Les motifs suivants sont interchangeables

$(060)_{bb} = (116)_{bb}$ $\qquad$ $(100)_{bb} = (016)_{bb}$.

Conjecture : un entier admet plusieurs écritures en base bizarre si et seulement si son écriture contient l'un des motifs $(016)_{bb}$, $(116)_{bb}$, $(060)_{bb}$, $(100)_{bb}$.

Algorithme de codage

Étant donné un entier N, l'algorithme indique si cet entier est codable (ou pas) et retourne en ce cas la liste de tous les codages de cet entier en base bizarre.

Représentation de la suite des entiers codables

Nous avons construit une application "bizarre" qui à un entier k associe le $k^{ème}$ nombre codable N_k lorsqu'ils sont rangés dans l'ordre indiqué ci-contre.

Les trois premiers :

- $N_0=(000)_{bb} = 0$
- $N_1=(001)_{bb} = 1$
- $N_2=(006)_{bb} = 6$

Les trois suivants :

- $N_3=(010)_{bb} = 3$
- $N_4=(011)_{bb} = 4$
- $N_5=(016)_{bb} = 9$

Proposition 1 : soit k un entier. Pour déterminer le k-ième nombre codable,

1- On code k en base 3

2- On remplace tous les chiffres "2" par des "6".

3- L'entier ainsi codé en base bizarre est N_k.

Exemple : $15= (121)_3$ donc $N_{15}=(161)_{bb}=28$

La courbe ci-contre représente les 50 000 premiers nombres entiers codables. On observe des motifs auto-similaires.