Pavages du plan avec des polygones convexes

Par Nicolas Even, Gaby Portelli et Paul Prilleux

Problématique :

Notre projet est de trouver quels polygones pavent le plan. Plus précisément, il s'agit de déterminer l'ensemble des **polygones convexes** pouvant paver le plan.

Nous sommes tout d'abord partis d'un résultat fondamental que tout parallélogramme pave le plan afin de trouver premièrement quels sont les polygones convexes réguliers pavant le plan, puis nous nous sommes intéressés au cas des polygones convexes non réguliers.

Notre étude se limitant au pavage par des polygones convexes, nous ne parlerons pas des pavages avec des figures non convexes, bien que ceux-ci représentent une grande partie des pavages.

Sommaire :

I] Définitions et résultat fondamental

<u>Définitions :</u>

- **Pavage** : le plan est considéré comme pavé lorsqu'il est rempli par des copies d'une seule et même figure, les copies ayant été créées par translation, rotation et symétrie centrale de la figure originale. Le plan ne doit présenter aucun espace libre ni aucune superposition de la figure de base. Les symétries miroir sont ici interdites.

- **Polygone convexe** : un polygone convexe est un polygone dont chaque point – pas obligatoirement un sommet – peut être relié par un segment qui ne quitte pas le polygone.

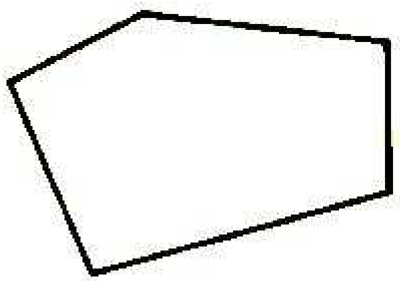


Figure 1 : polygone convexe

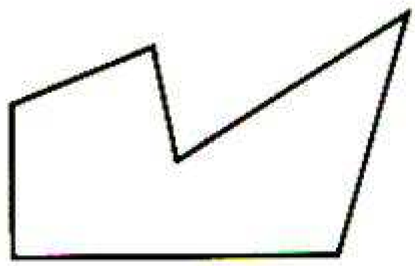


Figure 2 : polygone non convexe

- **Polygone régulier** : on appelle polygone régulier tout polygone convexe dont tous les côtés et angles sont égaux.

<u>Résultat fondamental</u> : tout parallélogramme pave le plan.

Ce premier résultat nous a été donné au début de nos recherches et a été considéré comme admis, mais il est simple de prouver graphiquement que tout parallélogramme pave le plan : en effet, lorsqu'on effectue des copies successives de ce parallélogramme - uniquement par **translation** - on s'aperçoit rapidement que, du fait que le parallélogramme possède des côtés parallèles et égaux deux à deux, ses copies s'emboîtent parfaitement et peuvent paver le plan.

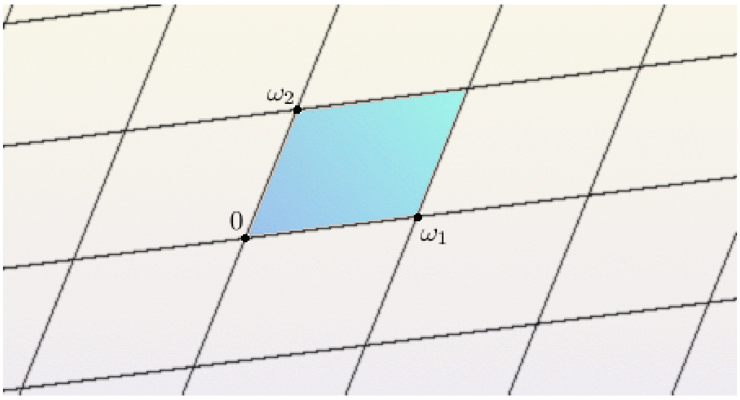


Figure 3: pavage du plan avec des parallélogrammes.
On peut facilement deviner les translations effectuées à partir du parallélogramme d'origine.

II] Pavages avec des polygones réguliers

<u>Théorème :</u> les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont :
–Les triangles équilatéraux
–Les carrés
–Les hexagones réguliers

<u>Preuve :</u> soit un polygone régulier à n côtés et ϑ la valeur de l'angle entre deux côtés consécutifs. Divisons-le en n triangles isocèles identiques de sorte à ce que chacun est comme base l'un des côtés du polynôme.

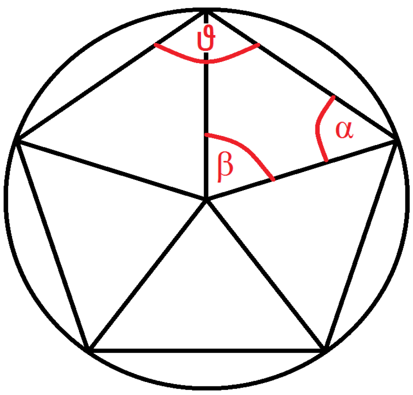


Figure 4 : Illustration géométrique

Notons dans ces triangles isocèles β l'angle unique et α tel que $2\alpha = \vartheta$.

Nous avons alors :

$$\boldsymbol{\beta = 2\pi/n}$$

De plus comme les triangles sont isocèles :

$$2\alpha + \beta = \pi$$
$$2\alpha + 2\pi/n = \pi$$
$$\alpha = \pi/2 - \pi/n$$
$$\boldsymbol{\alpha = \pi(n-2)/2n}$$

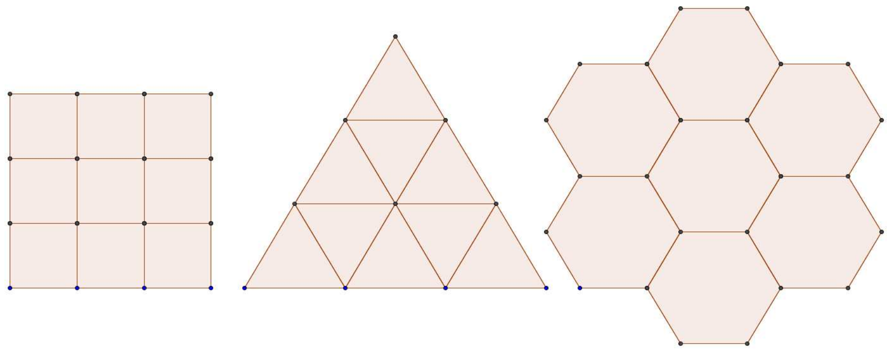
Comme $\vartheta = 2\alpha$, il vient :

$$\boldsymbol{\vartheta = \pi(n-2)/n}$$

Pour que P pave il doit donc exister un entier naturel k tel que :

$$2\pi = k\,\vartheta$$
$$2\pi = k\pi(n-2)/n$$
$$2 = k(n-2)/n$$
$$k(n-2) = 2n$$
$$k(n-2) = 2(n-2) + 4$$
$$(n-2)(k-2) = 4$$

Autrement dit, (n-2) doit être diviseur de 4. Comme les seuls diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4, n peut donc valoir 3, 4 ou 6.



Figures 5, 6 et 7 : pavages avec des carrés, des triangles équilatéraux et des hexagones réguliers.

Par conséquent, **aucun autre** polygone convexe régulier ne peut paver le plan.

III] Pavages par des polygones non réguliers

A) Les triangles

Tout triangle pave le plan. Ceci est évident car tout d'abord, tout triangle est nécessairement convexe. De plus, si l'on prend un triangle, et que l'on forme son symétrique par rapport à l'un de ses côtés, alors on se retrouve avec un parallélogramme qui comme nous le savons, est une figure qui pave le plan.

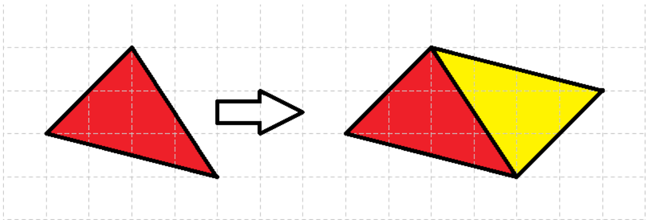


Figure 9 : formation d'un parallélogramme à partir de la symétrie axiale du triangle.

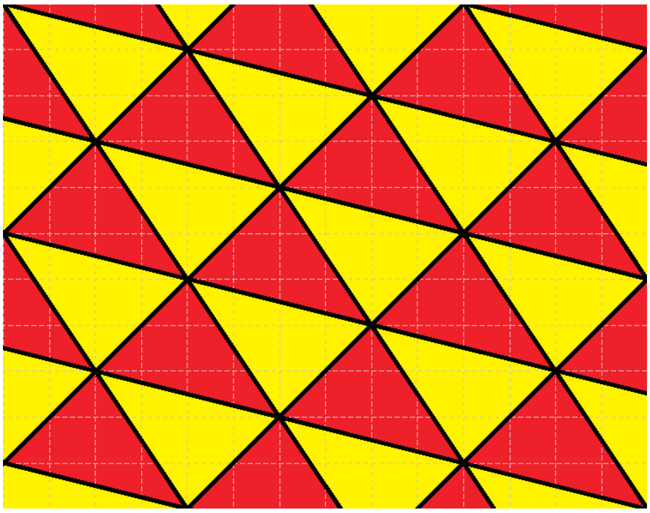


Figure 10 : pavage du plan avec des triangles.

Ici, la technique de pavage utilisée est la **symétrie centrale** pour former un parallélogramme, puis des translations afin de paver le plan.

B) Les quadrilatères

Tout quadrilatère convexe pave le plan. En effet, si l'on prend un quadrilatère quelconque et qu'on procède par translations/rotations, de manière à ce que seuls les côtés de même longueur se touchent, on obtient l'assemblage suivant, ne possédant aucune superposition de polygones du fait que la somme des angles d'un quadrilatère fait 360°.

Ainsi en procédant par successions de symétries centrales du quadrilatère par rapport aux milieux de ses côtés il est évident que celui-ci pave le plan.

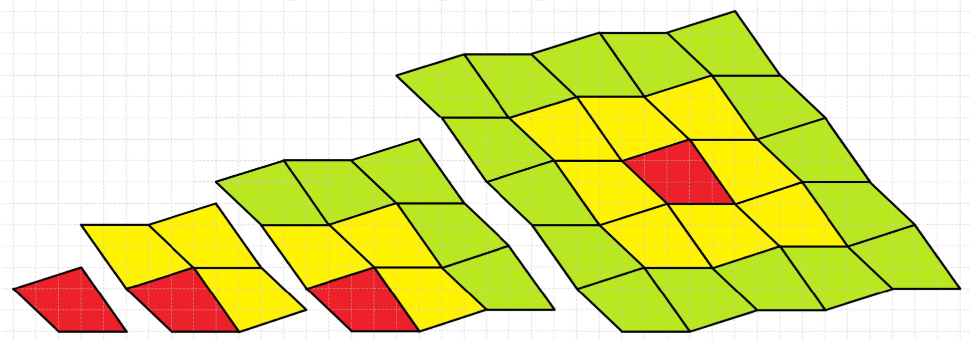
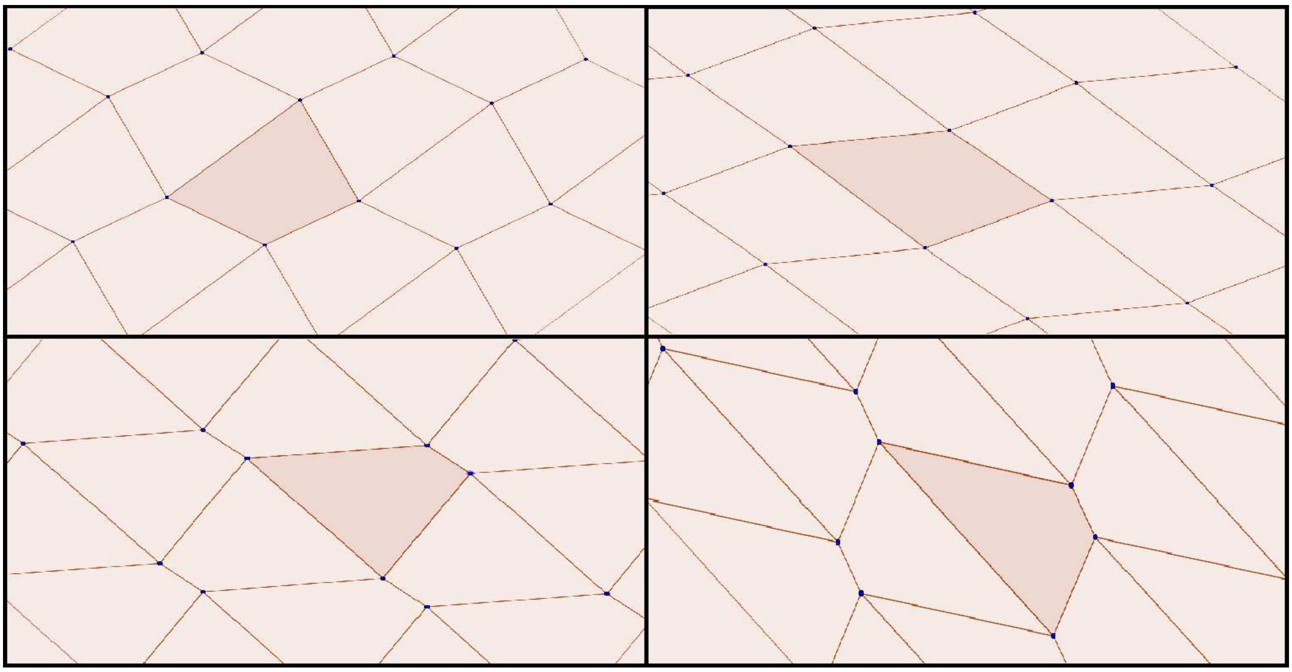


Figure 11 : succession de symétries centrales à partir d'un quadrilatère d'origine.

Pour nous assurer que tous les quadrilatères pavent le plan, nous avons créé un pavage en temps réel à partir d'un quadrilatère d'origine sur GeoGebra. Voici quelques résultats qui confirment par monstration que n'importe quel quadrilatère pave le plan :



Figures 12, 13, 14, et 15 : différents pavages avec des quadrilatères convexes non réguliers.

C) Les hexagones

Sur la figure précédente, on peut voir que deux quadrilatères côte à côté forment un hexagone qui pave le plan.

Ces hexagones ont la propriété d'être formés par deux quadrilatères identiques, chacun symétrique de l'autre par rapport de l'autre par rapport au milieu de leur côté commun. Ils ont donc leurs côtés opposés parallèles et de même longueur.

De plus, seuls ces hexagones « semi-réguliers » pavent le plan : le fait qu’un hexagone ait ses côtés opposés parallèles et égaux est une condition nécessaire pour que celui-ci pave le plan.

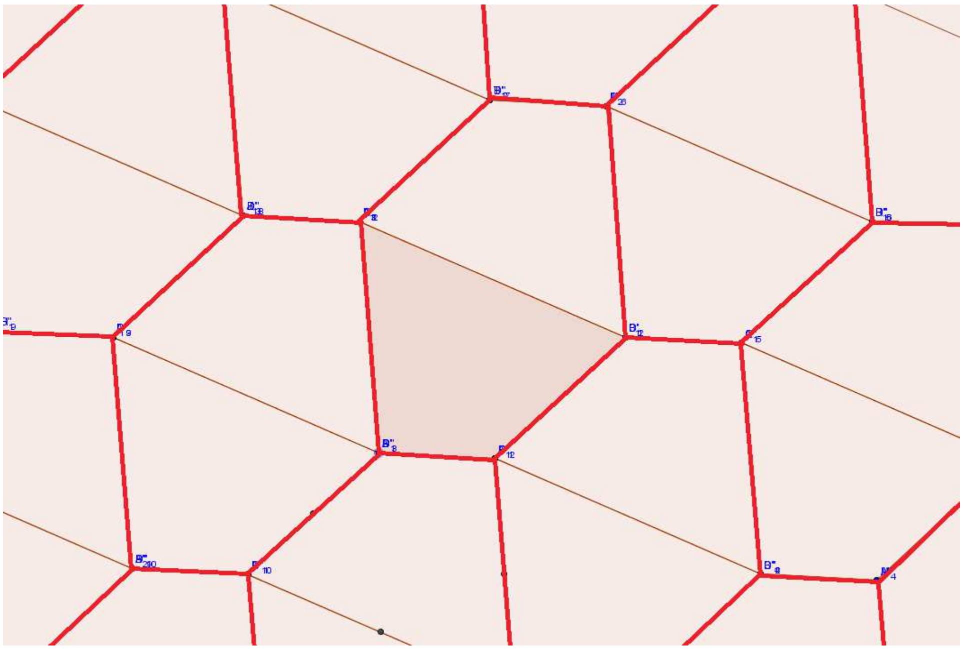


Figure 16 : pavage du plan avec des hexagones formés par deux quadrilatères.

D) Les pentagones

Les pentagones sont un cas bien particulier du fait que les pentagones réguliers ne pavent pas le plan. Nous avons trouvé deux cas de pentagones qui peuvent se ramener par le biais de translations et de rotations à une figure particulière, l'hexagone cité précédemment :

1er cas :

Si l'on prend un hexagone ayant ses côtés opposés parallèles et de même longueur, alors en traçant un segment passant par son centre on obtient deux pentagones identiques :

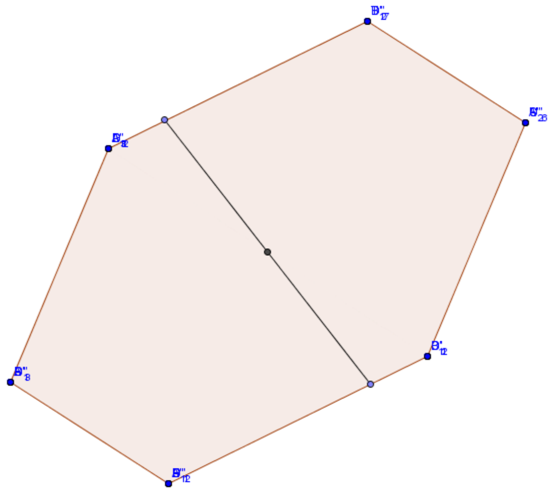


Figure 17 : hexagone formé à partir de deux pentagones.

Si le segment tracé à pour extrémités deux points situés sur les côté de l'hexagone on obtient alors un pentagone, tandis que si les extrémités sont des coins de l'hexagone, on obtient deux quadrilatères. Dans le cas du pentagone, celui formé possède donc deux côtés parallèles. Ainsi les pentagones possédant deux côtés parallèles pavent le plan.

2ème cas :

Il existe une deuxième façon de découper un ledit hexagone particulier, mais cette fois en 4 pentagones, ce découpage est le suivant :

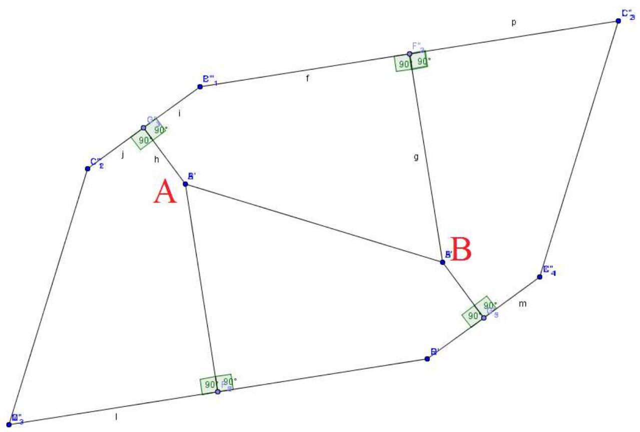
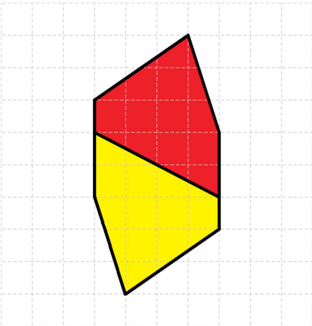
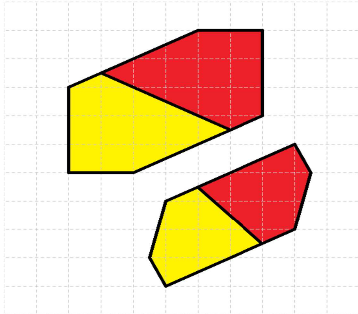
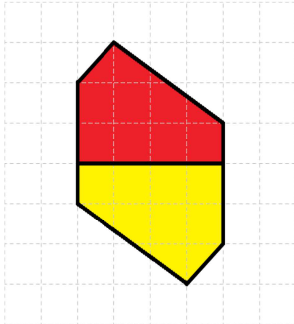
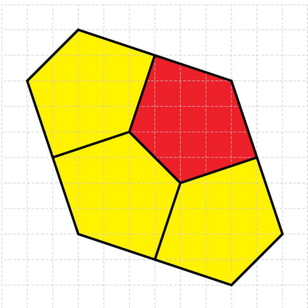
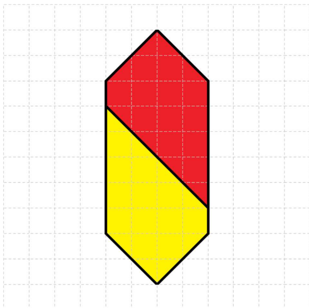
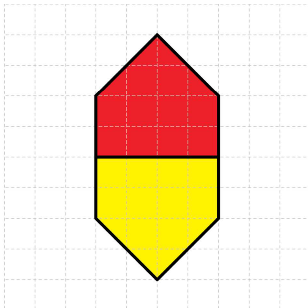


Figure 18 : hexagone formé à partir de quatre pentagones.

Ce pentagone a la particularité d'avoir 2 angles droits, chacun étant formé par deux côtés de même longueur, de plus comme la somme des angles d'un pentagone fait 540°, la somme des trois autres sommets fait donc 360°, ce qui explique pourquoi les sommets peuvent se rejoindre au point A et B sans trous ni superpositions.

Voici un tableau donnant des exemples de pentagones pavant, en fonction de leur nombre de côtés parallèles (lignes) et d'angles droits (colonnes).

2 côtés parallèles 0 angle droit 	2 côtés parallèles 1 angle droit 	2 côtés parallèles 3 angles droits 
0 côté parallèles 2 angles droits formés par deux côtés de même longueur 4 côtés égaux 	4 côtés parallèles (2à2) 1 angle droit 	4 côtés parallèles (2à2) 3 angles droits 

Ainsi, peuvent paver le plan :

–**Les triangles**
–**Les quadrilatères**
–**Les hexagones possédant leurs côtés opposés parallèles et de même longueur**
–**Les pentagones possédant deux côtés parallèles et/ou deux angles droits formés par deux côtés de même longueur.**

E) Résultats supplémentaires

Nous avons trouvé des polygones convexes non réguliers pavant le plan. Mais sont-ce les seuls ? Afin de répondre à cette question, nous avons émis l'hypothèse suivante :

Aucun polygone à plus de six côtés ne peut paver le plan.

Cette hypothèse peut être vérifiée graphiquement : en effet, avec un polygone de 7 côtés ou plus, le « pavage » n'est pas parfait : il comporte des superpositions des figures pavées. Donc aucun de ces polygones ne pave le plan.

IV] Animations prévues

Nous souhaitons réaliser des polygones convexes en bois afin qu'on puisse par la manipulation voir si le pavage est possible ou non. D'autre part, une application sur tablette tactile permettra d'illustrer quels sont les pavages convexes que l'on peut déformer.

En conclusion : nous avons déterminé tous les polygones convexes pouvant paver le plan.

- **Polygones réguliers** : seuls les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones réguliers peuvent paver le plan.

- **Polygones non réguliers** : seuls les triangles, les quadrilatères et les hexagones et pentagones décrits ci-dessus pavent le plan.