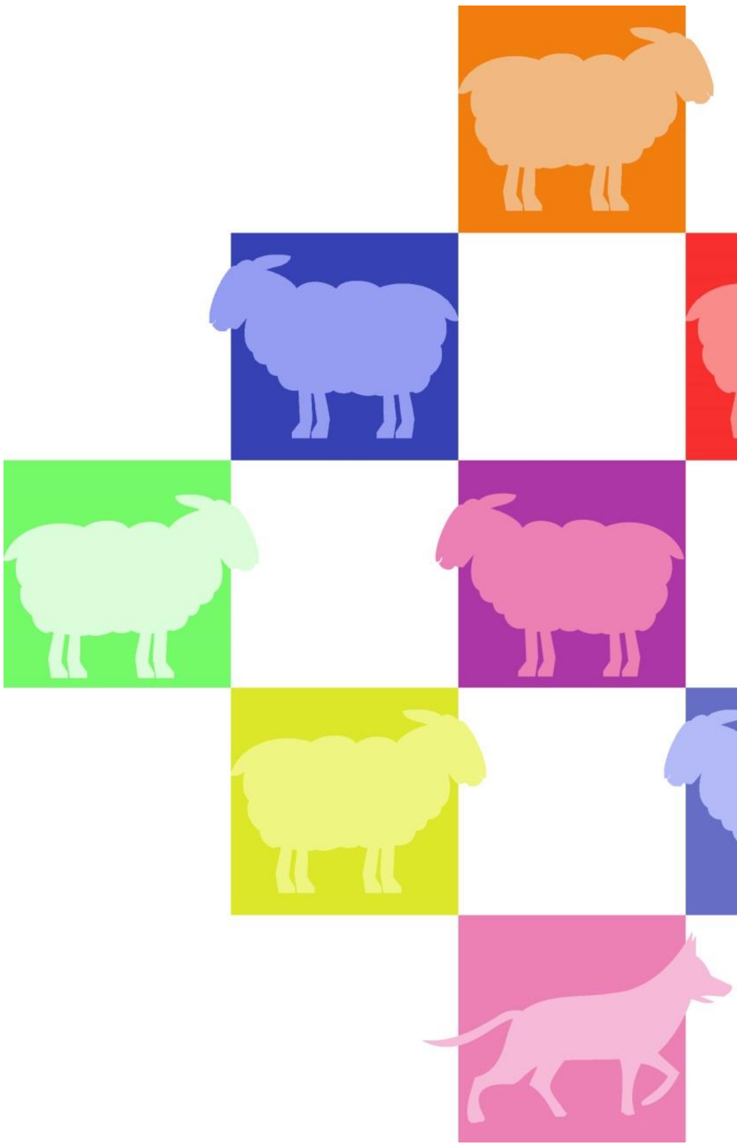
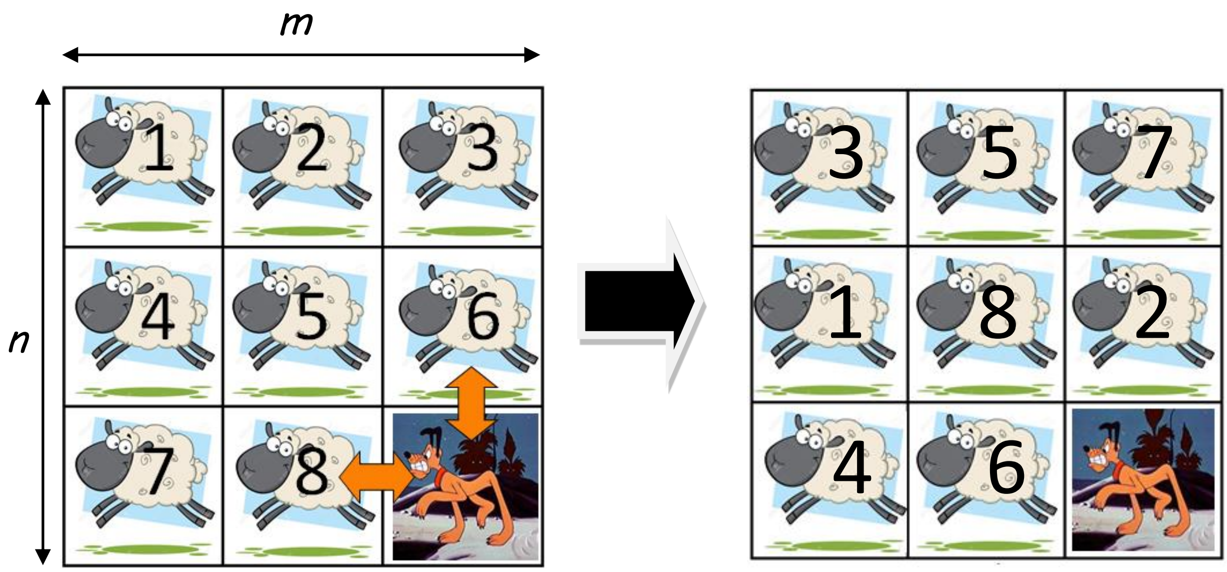
Le Mouton Taquin

Culture et Jeux Mathématiques



Auteurs : Alexandre Demange – Axel Métais – Nicolas Vanpouke – Anaël Yahi



Une bergerie a une forme rectangulaire de n lignes et m colonnes. Sur chacune de ces cases se trouve un mouton, unique (représenté par un chiffre ou une lettre) sauf sur la dernière case ou il y a un chien de berger (noté Z). Les moutons sont rangés selon un ordre défini (dans l'ordre croissant). Lorsque ceux-ci sont dans le désordre, le chien doit ramener chacun à sa place. Pour cela, il ne dispose que d'une seule technique : échanger successivement sa place avec un mouton appartenant à une case adjacente (pas en diagonale) pour tenter de remettre l'ordre.

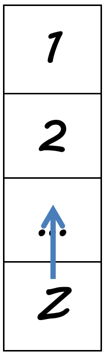
NB : quelle que soit la situation désordonnée, le chien est toujours placé dans la même case, à savoir la dernière (celle le plus en bas à droite)

Problématique : A partir d'une situation désordonnée aléatoire, le chien peut-il toujours ranger les moutons selon un ordre déterminé à l'avance ? Si non, à quelles conditions pourra-t-il le faire ?

Approche du problème

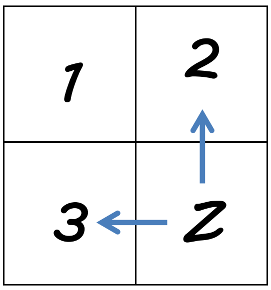
Pour commencer, nous nous sommes intéressés à l'étude des « cas particuliers » :

1. Cas où m=1



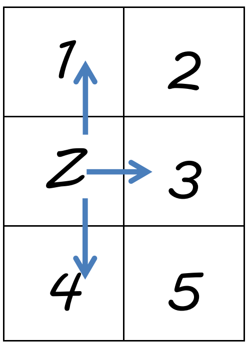
On remarque que le chien ne dispose au départ que d'un échange possible puisqu'il n'a qu'un mouton adjacent. En échangeant successivement avec d'autres cases, il n'aura toujours au maximum que deux choix d'échanges possible. Ainsi il ne pourra pas ranger l'ordre du mouton mais seulement la position de celui-ci d'une seule case au plus. La seule situation rangeable correspond donc à la situation déjà ordonnée. Le chien ne peut donc pas ranger ce cas.

2. Cas où n=m=2



S'agissant d'un carré de quatre cases, on remarque que le chien n'a toujours que deux échanges possibles avec des cases adjacentes : on retrouve le même principe que dans le cas précédent, à savoir que le chien ne peut ranger, modulo 4, l'ordre des moutons mais seulement leurs positions. Le chien ne peut pas ranger ce cas.

3. Cas où n=3 et m=2



Dans cette situation, on remarque que le chien a la possibilité entre trois échanges avec des cases adjacentes. Ce cas est intéressant car on remarque que le chien n'est plus contraint de réaliser un même mouvement (comme le mouvement cyclique du cas 2) ,ce qui va lui permettre de modifier l'ordre des moutons dans la bergerie.

Quelques définitions

Pour faciliter la clarté dans notre problème, on définit :

Transposition : une transposition correspond à l'échange de deux cases, pas nécessairement adjacentes.

Permutation : elle correspond à une succession de transpositions.

Action du chien : une action du chien correspond à l'ensemble des transpositions que celui-ci a réalisé en partant de sa case pour se déplacer dans la bergerie et revenir à cette même case : elle s'apparente donc à une permutation.

Identité : situation ordonnée au départ.

Mouvement du chien

De l'étude des cas particuliers nous avons pu émettre des conjectures et les vérifier.

En effet, nous avons constaté que le mouvement du chien était réversible, c'est-à-dire qu'en appliquant une permutation à une situation donnée, puis l'inverse de cette même permutation, on revient à la situation de départ. On a donc pu en extraire la proposition suivante :

Proposition A :

Soit $(n,i) \in \mathbb{N}^2$, $\tau_{i,i+n}$ une permutation réalisable par le chien de la case i vers la case i+n, soit P(n) la proposition :

" Tout mouvement du chien de n cases est réversible, il s'agit d'une bijection. "

Démonstration par récurrence :

Initialisation :

n = 1 : c'est trivial, on échange 2 cases une fois, puis on les échange à nouveau.

→ $\tau_{i,i+1} \circ \tau_{i+1,i} = id$, id étant l'application identité

Hérédité :

Soit $n \in N$ tel que P(n). Soit τ une permutation réalisable par le chien.

Par hypothèse,

$\tau_{i,i+1} \circ \tau_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ \tau_{i+n-1,i+n} \circ \tau_{i+n,i+n-1} \circ \ldots \circ \tau_{i+2,i+1} \circ \tau_{i+1,i}$

$= \tau_{i,i+1} \circ \tau_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ id \circ \ldots \circ \tau_{i+2,i+1} \circ \tau_{i+1,i}$

...

$= \tau_{i,i+1} \circ \tau_{i+1,i} = id$

Donc pour n+1, on a:

$\tau_{i,i+1} \circ \tau_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ \tau_{i+n-1,i+n} \circ \tau_{i+n,i+n+1} \circ \tau_{i+n+1,i+n} \circ \tau_{i+n,i+n-1} \circ \ldots \circ \tau_{i+2,i+1} \circ \tau_{i+1,i}$

$= \tau_{i,i+1} \circ \tau_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ \tau_{i+n-1,i+n} \circ id \circ \tau_{i+n,i+n-1} \circ \ldots \circ \tau_{i+2,i+1} \circ \tau_{i+1,i}$

$= \tau_{i,i+1} \circ \tau_{i+1,i+2} \circ \cdots \circ \tau_{i+n-1,i+n} \circ \tau_{i+n,i+n-1} \circ \ldots \circ \tau_{i+2,i+1} \circ \tau_{i+1,i}$ ...

$= \tau_{i,i+1} \circ \tau_{i+1,i} = id$

Conclusion: Ainsi pour tout (n,i) dans N, P(n) est vérifiée.

II - Le rôle déterminant de la parité

On remarque qu'une action du chien correspond toujours à un nombre pair de transpositions. Ainsi si le dérangement correspond à un nombre impair de transpositions, le chien ne pourra pas le ranger. L'objectif de cette partie est donc de montrer que tout dérangement pair est rangeable. (CF théorème)

Nouvelle Notation

8	7	6
5	4	3
2	1	0(Z)

Pour la suite du problème, nous allons utiliser une autre notation de la grille, plus naturelle car, cette fois-ci, le chien peut passer d'un mouton i au mouton i+1 uniquement avec des mouvements qui lui sont permis. Ainsi en « dépliant »la grille suivant les valeurs croissantes des moutons, on obtient la grille « ligne » suivante (la case 0 étant le chien) :

0	1	2	3	4	5	6	7	8

En étendant cette notation à une grille nxm on obtient :

nm-1	(n-1)m +(m-2)	…	(n-2)m
…	…	…	…
m	m+1	…	2m-1
m-1	m-2	…	0 (Z)

0	…	m-2	m-1	m	m+1	…	2m-1	…	(n-2)m	…	(n-1)m +(m-2)	nm-1

Assimilation aux mouvements du chien

Avec les notations ci-dessus, trois cases successives (notées i, i+1, i+2) peuvent être soit en «angle »

i+1	i+2
i	

soit en « ligne »

i+2	i	i+1

Dans tous les cas, le chien est capable d'échanger la position des 3 cases tel que :
i prend la place de i+1, i+1 celle de i+2 et i+2 celle de i, sans que les autres cases ne soient dérangées.

i+1	i+2
i	

i+2	i	i+1

Proposition B :

Ainsi, le mouvement du chien est assimilable à une permutation (i,i+1,i+2)

Démonstration :

Cas « angle »

i+1	i+2	...	
i	A	..	
...	...	...	...
		...	Z

Le chien dérange un certain nombre de moutons pour se positionner en A. Puis « cycle » plusieurs fois pour échanger la position des moutons i, i+1, i+2.

i+1	1+2	→	i+1	i+2	→	Z	i+2	→	i+2	Z	→	i+2	i	→	i+2	i	→	Z	i	→	i	Z
i	Z		Z	i		i+1	i		i+1	i		i+1	Z		Z	i+1		i+2	i+1		i+2	i+1

i	i+1
i+2	Z

i prend la position de i+1
i+1 prend la position de i+2
i+2 prend la position de i

Soit (i, i+1, i+2) → (1+2, i, i+1)

i	i+1	...	
i+2	Z	..	
...	..	...	...
		...	

Ainsi, en « cyclant » deux fois, le chien réalise une permutation (i, i+1, i+2). Puis le chien revient à sa case de départ en rangeant ce qu'il avait dérangé au début. Seules les trois cases sont bien échangées, le reste de la grille n'a pas changé.

Cas « ligne »

i	i+1	i+2	…	
i-1	i-2	A	…	
…	…	…	…	
			…	Z

Le chien dérange un certain nombre de moutons pour se positionner en A. Puis réalise une succession de transpositions jusqu'à obtenir une permutation (i, i+1, i+2).

i	i+1	i+2
i-1	i-2	Z

→

i	i+1	Z
i-1	i-2	i+2

→

Z	i	i+1
i-1	i-2	i+2

→

i-1	i	i+1
Z	i-2	i+2

→

i-1	i	i+1
i-2	i+2	Z

i-1	i	Z
i-2	i+2	i+1

→

i-1	Z	i
i-2	i+2	i+1

→

i-1	i+2	i
i-2	Z	i+1

→

i-1	i+2	i
Z	i-2	i+1

→

Z	i+2	i
i-1	i-2	i+1

i+2	i	Z
i-1	i-2	i+1

→

i+2	i	i+1
i-1	i-2	Z

i prend la position de i+1
i+1 prend la position de i+2
i+2 prend la position de i

Soit (i, i+1, i+2) → (1+2, i, i+1)

i+2	i	i+1	…	
i-1	i-2	Z	…	
…	…	…	…	
			…	

Ainsi, le chien réalise une permutation (i, i+1, i+2). Puis il revient à sa case de départ en rangeant ce qu'il avait dérangé au début. Seules les trois cases sont bien échangées, le reste de la grille n'a pas changé.

Existence de deux cas finaux

Ainsi, après que le chien ait réalisé plusieurs mouvements, on obtient deux configurations finales :

Soit toute la grille est rangée, ce qui est le cas lorsque la grille est dérangée par un nombre pair de transpositions.

Soit toute la grille est rangée à l'exception des deux dernières cases à gauche du chien, ce qui est le cas lorsque la grille est dérangée par un nombre impair de transpositions.

nm-1	…	nm-m+2	nm-m+1	nm-m
…	…	…	…	…
m-1	…	2	1	Z

nm-1	…	nm-m+2	nm-m+1	nm-m
…	…	…	…	…
m-1	…	1	2	Z

Théorème :

- Si ∂ est paire : le cas est rangeable.
- Si ∂ est impaire : le cas n'est pas rangeable.

Avec ∂ défini comme la succession des transpositions effectuées pour déranger l'identité.

Un Brin D'Histoire :

Samuel Loyd (1841-1911) inventa de nombreux puzzles et devinettes mathématiques. Le taquin (appelé à l'origine puzzle-15) est un des plus connus. Le problème qu'il posa était à partir d'une grille rangée d'arriver, en utilisant uniquement les mouvements du chien, à échanger les positions des deux dernières cases. La prime de 1000 dollars offerte comme récompense au premier qui y parviendrait ne fut décernée à personne, bien que tous se soient acharnés sur le problème...Nul ne voulait renoncer à ses recherches, chacun étant certain qu'il parviendrait au but.

Parallèlement à nos résultats papiers et dans un objectif de modéliser notre problème, nous avons développé un logiciel informatique, présenté sous la forme d'un jeu qui propose deux modes d'utilisation :

- Un mode « joueur » qui permet à l'utilisateur de choisir un nombre de colonnes et un nombre de lignes et de résoudre la grille ainsi créée et aléatoirement dérangée

- Un mode « ordinateur » qui permet à l'ordinateur de résoudre seul la grille lorsque cela est possible.

Méthode algorithmique

Notre algorithme ainsi créé utilise deux méthodes pratiques :

Méthode de calcul de la parité du dérangement de la grille :

Pour connaître la parité du nombre de permutations affectées à la grille pour la déranger, l'algorithme transforme la grille en une grille « ligne ».

7	4	1
6	3	8
2	5	Z

→

Z	5	2	6	3	8	1	7	4

4+ 1+ 3+ 2+ 3+ 0+ 1+ 0 = 14

Puis compte le nombre de fois qu'un mouton a subi une transposition.

Ex : Le mouton 5 a 4 moutons (1,2,3,4) situés à sa droite qui, lorsque la grille est rangée, sont normalement rangés à sa gauche. Ainsi le mouton 5 a subi 4 transpositions.

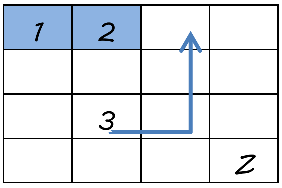
En itérant ce procédé à chaque mouton et en sommant leurs nombres respectifs de transpositions on obtient le nombre de transpositions qui ont été appliquées à la grille (ici la grille a été dérangée par 14 transpositions, soit un nombre pair : donc la grille est solvable.)

Le nombre $S = (-1)^{14}$ est appelé la signature de la grille.

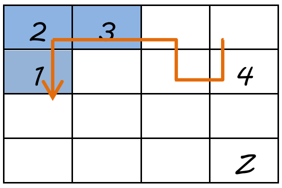
Si la grille a été dérangée par un nombre pair de transpositions, S=1 et la grille peut être résolue.

Si la grille a été dérangée par un nombre impair de transpositions, S=-1 et la grille ne peut être résolue.

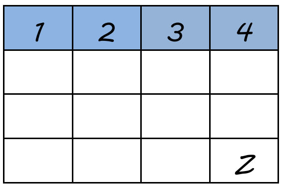
Méthode de résolution d'une grille solvable :



Une fois que la solvabilité d'une grille a été vérifiée, l'algorithme utilise une autre méthode pratique pour la résoudre. Dans un premier temps, il place tous les moutons de la première ligne sauf celui dans le coin à droite, sans repasser par les cases qu'il a déjà rangées.



Puis il place le mouton du « coin droite » sous sa cellule d'origine et bascule la première ligne vers la gauche pour faire remonter le coin de droite. Il réitère ce procédé jusqu'à ce qu'il ne lui reste que les 2 dernières lignes non rangées.



1	2	3	4
5	6	7	8
	9	13	Z

Ensuite, l'algorithme ne raisonne plus en termes de ligne mais en termes de colonne.

Il place les moutons de la première colonne à gauche du chien (le mouton devant aller en haut de la colonne est placé le plus à gauche)

1	2	3	4
5	6	7	8
	9	13	Z

Puis le chien « cycle » jusqu'à ce que les deux moutons soient placés. Il réitère ce procédé jusqu'à ce qu'il ne lui reste que les 2 dernières colonnes non rangées.

1	2	3	4
5	6	7	8
9			
13			Z

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	15	11
13	14	12	Z

Il ne lui reste plus qu'à cycler pour replacer les trois derniers moutons.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	Z

NB : Ce procédé s'applique à des grilles nxm, et permet à l'algorithme de résoudre toutes les grilles dérangées par un nombre pair de transpositions. Il est à noter que cette méthode n'est pas la plus rapide car, à chaque fois que le chien effectue une étape, il revient à sa position d'origine. Celle-ci est néanmoins efficace.

Conclusion

Il est intéressant de constater qu'avec Le Taquin, un jeu simple et bien connu de tous, en particulier des enfants, on peut extraire une quantité considérable de mathématiques, nous accaparant ainsi presque une année entière de recherches (à raison de deux heures par semaine). Aussi passionnant qu'instructif, le projet Maths en Jeans nous a ainsi fait découvrir une façon plus libre de faire des maths, axé sur la recherche et la prise d'initiative. En touchant ainsi le métier de chercheur du bout des doigts, nous avons pu nous rendre compte de l'importance des maths et de leurs présence dans notre quotidien, y compris dans un petit jeu de bois d'apparence anodin !

Special Thanks : Nous voudrions tout particulièrement remercier Nicolas Nguyen, professeur de mathématiques au Lycée-Prépa Rabelais, pour nous avoir guidé dans nos recherches et organisé un temps de travail hebdomadaire ainsi que Vincent Guirardel, professeur à l'institut de recherche mathématique à Rennes, pour nous avoir soutenu dans notre démarche.

Crédits photos : (p1) http://lesmoutonsnoirs.fr/

(p1) http://www.designcrowd.com/design/2580235

(p1) http://maitre-de-chien.fr/

(p2) http://www.fotosearch.fr/CSP754/k17865007/

(p10) http://www.chesshistory.com/winter/winter02.html