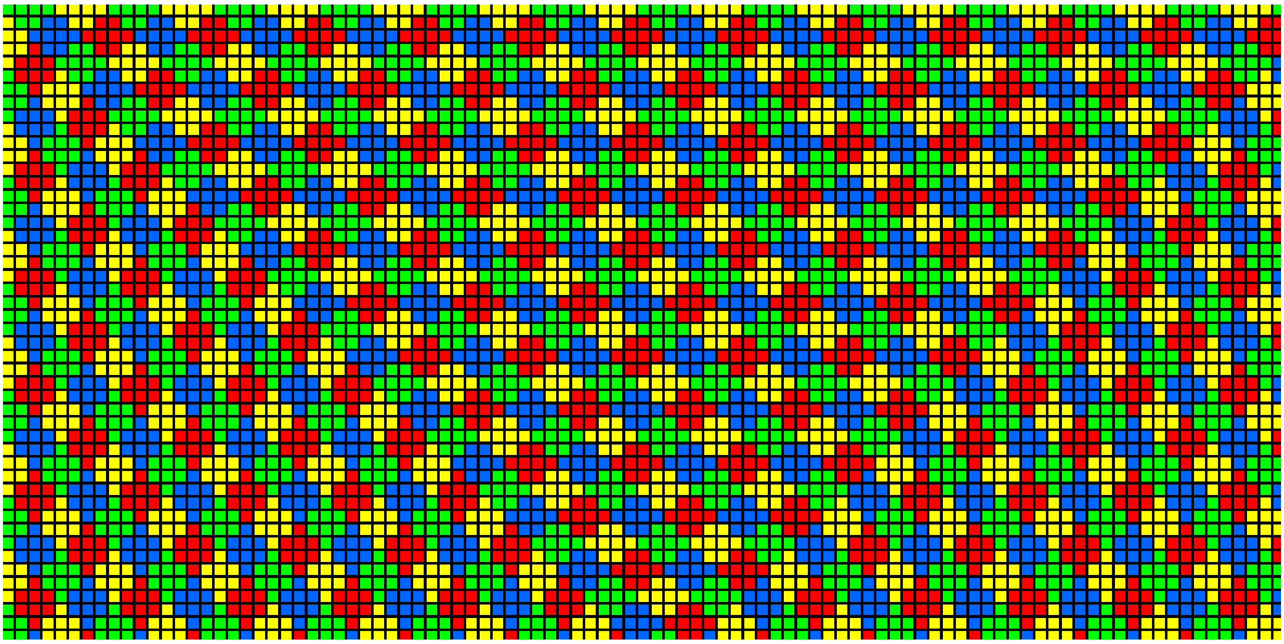
Coloriage du Plan

ou

Comment colorier le plan pour que deux points situés à une distance unitaire ne soient jamais de la même couleur ?



Le Deunff Sylvan, Adam Alexandre, Beaumanoir Théo
Etudiants en MPSI au lycée François Rabelais de Saint-Brieuc

Sommaire :

Présentation du Sujet :

L'objectif de notre sujet est de déterminer le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier un plan en ayant jamais deux points de même couleur situés à une distance de 1.

C'est-à-dire que si l'on prend une feuille de papier de dimension arbitrairement grande, et une règle graduée on veut pouvoir donner le nombre minimum de couleurs à utiliser pour colorier entièrement cette feuille de papier en respectant les règles suivantes :

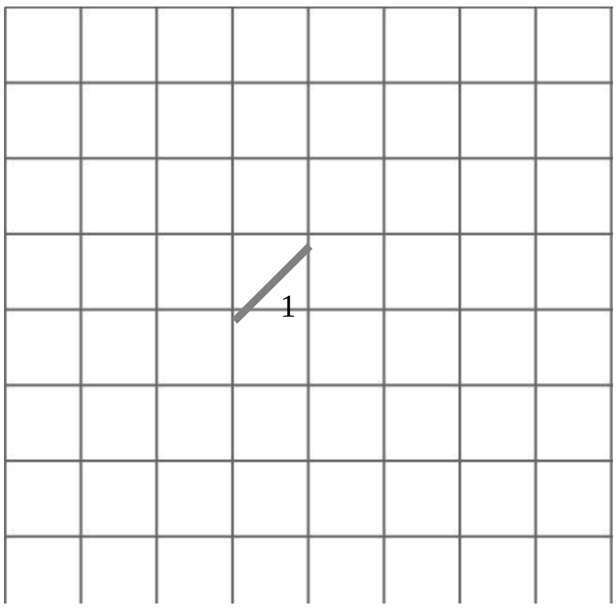
- Utiliser le moins de couleurs possible
- N'avoir jamais 2 points à une distance de 1 cm qui soient de même couleur

Nous avons donc commencé par vérifier qu'il existait de tels coloriages.

Pour représenter une distance il paraît naturel d'utiliser des cercles mais le choix de leur arrangement posait problème. Nous ne savions pas quelle disposition choisir pour limiter les lacunes (espaces entre les cercles). Nous avons donc choisi de commencer par étudier des coloriages de grilles composées de carrés.

I/ Exemple Introductif :

Lorsqu'on pave le plan par des figures, on vérifie que le plus grand côté soit la distance unitaire ou inférieure.



Nous avons démontré qu'il était possible de colorier le plan en 9 couleurs, en remplissant un motif composé de 9 carrés, chacun ayant pour diagonale l'unité. Puis se pose le problème des coins des carrés (non représentés sur la figure). Prenons l'exemple du carré vert central. Si on décide que son coin supérieur droit est vert, alors nécessairement son coin inférieur gauche ne l'est pas car ces 2 points sont à distance 1. On pourra pour régler la question décider que les coins inférieurs d'un carré sont de la couleur du carré. Par translation on montre aisément que le motif colorie le plan en répondant au sujet.

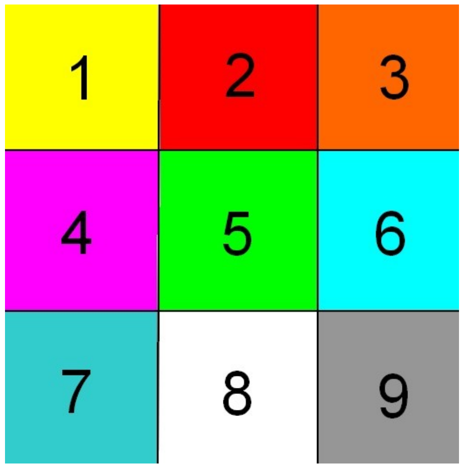
En partant de cet exemple nous avons eu l'idée, pour faciliter la résolution du problème, de chercher un encadrement du nombre minimal de couleurs.

II/ Encadrement du nombre minimal de couleurs (m):

1) Par majoration :

$M \leq 9$

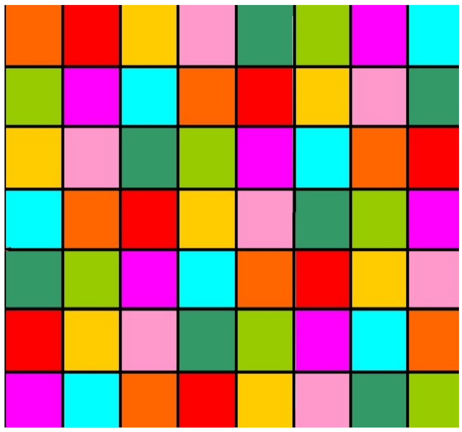
On a commencé simplement par un pavage en carré.
La diagonale étant égale à l'unité, et les problèmes de bords résolus, on peut colorier en 9 couleurs.



$M \leq 8$

Voulant trouver le nombre minimum de couleurs, on retire une couleur au modèle précédent autant de fois que possible.
De cette manière on arrive à un pavage en 8 couleurs.

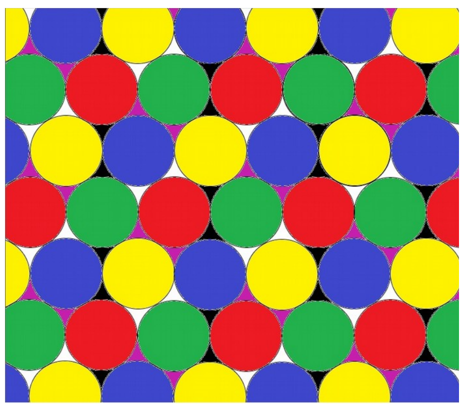
Mais nous ne sommes pas parvenus à colorier un pavage carré en moins de 8 couleurs.



$M \leq 7$

Les cercles représentant mieux la distance par rapport à un point, on pave le plan avec des cercles tangents.

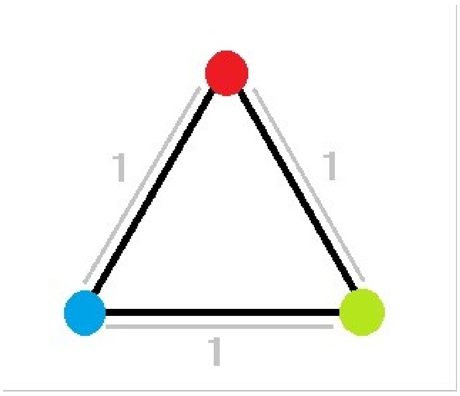
Toujours en vérifiant les couleurs des bords des cercles, on arrive à une majoration de 7 couleurs.



2) <u>Par minoration :</u>

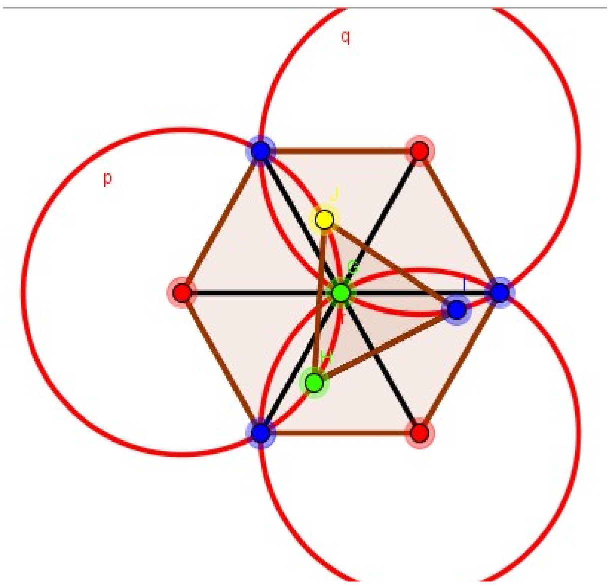
$m \geq 1$

La preuve de l'impossibilité de paver en 1 couleur est triviale, puisque le plan contient au moins deux points à une distance unitaire et donc de couleurs différentes.



$m \geq 2$

On a prouvé qu'il existait nécessairement deux points de couleurs différentes à une distance 1.
Si on prend ces deux points de couleurs différentes, et qu'on forme un triangle équilatéral alors le troisième sommet est forcément d'une troisième couleur.



$m \geq 3$

Avec le triangle précédent on construit un hexagone régulier.
Le point central est d'une couleur et ceux des sommets alternent nécessairement entre deux autres couleurs.
On trace les cercles de rayon 1 représentant l'ensemble des points ne pouvant être de couleur rouge.
On peut créer un triangle équilatéral dont chacun des sommets appartient aux cercles, il faut trois couleurs pour colorier le triangle, or on ne peut pas utiliser le rouge : il nous faut bien une quatrième couleur.

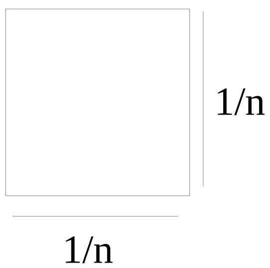
<u>Théorème sur le nombre minimal de couleurs (m) :</u>

$$\mathbf{4 \leq m \leq 7}$$

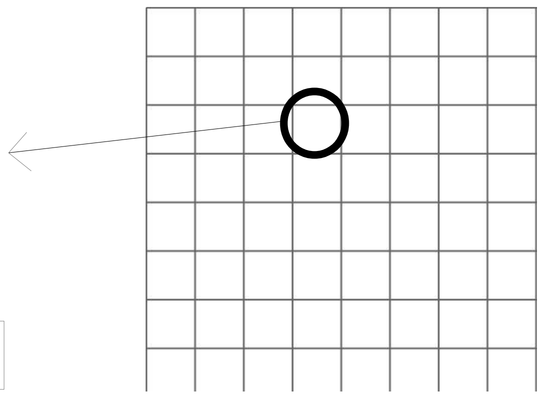
Avec cette approche géométrique la difficulté était de savoir quelle figure optimisait le mieux l'espace. Pour s'affranchir de ce problème on utilise une approche différente...

<u>III / Géométrie des pixels</u>

On assimile le plan à une grille constitués de petits carrés assimilables à des pixels, c'est-à-dire indivisibles donc monochromes, de coté 1/n.

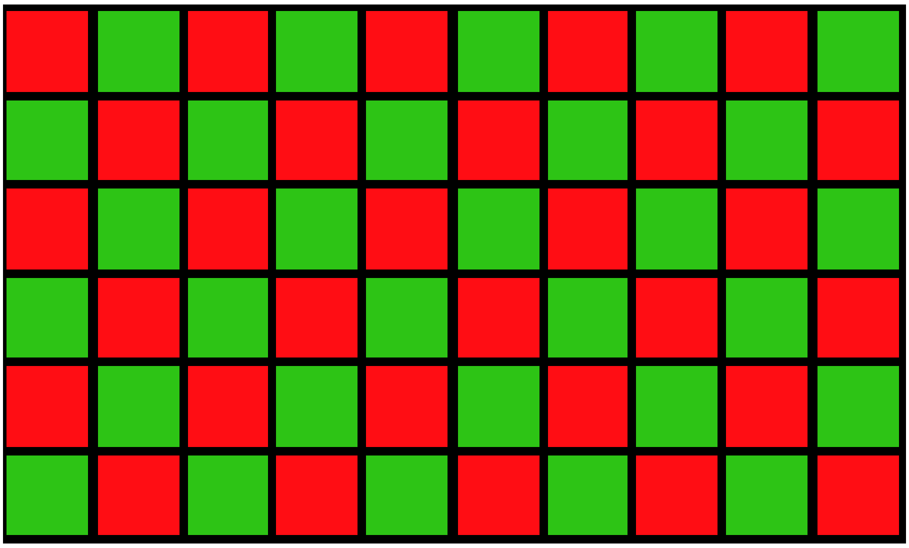


Représentation d'un pixel

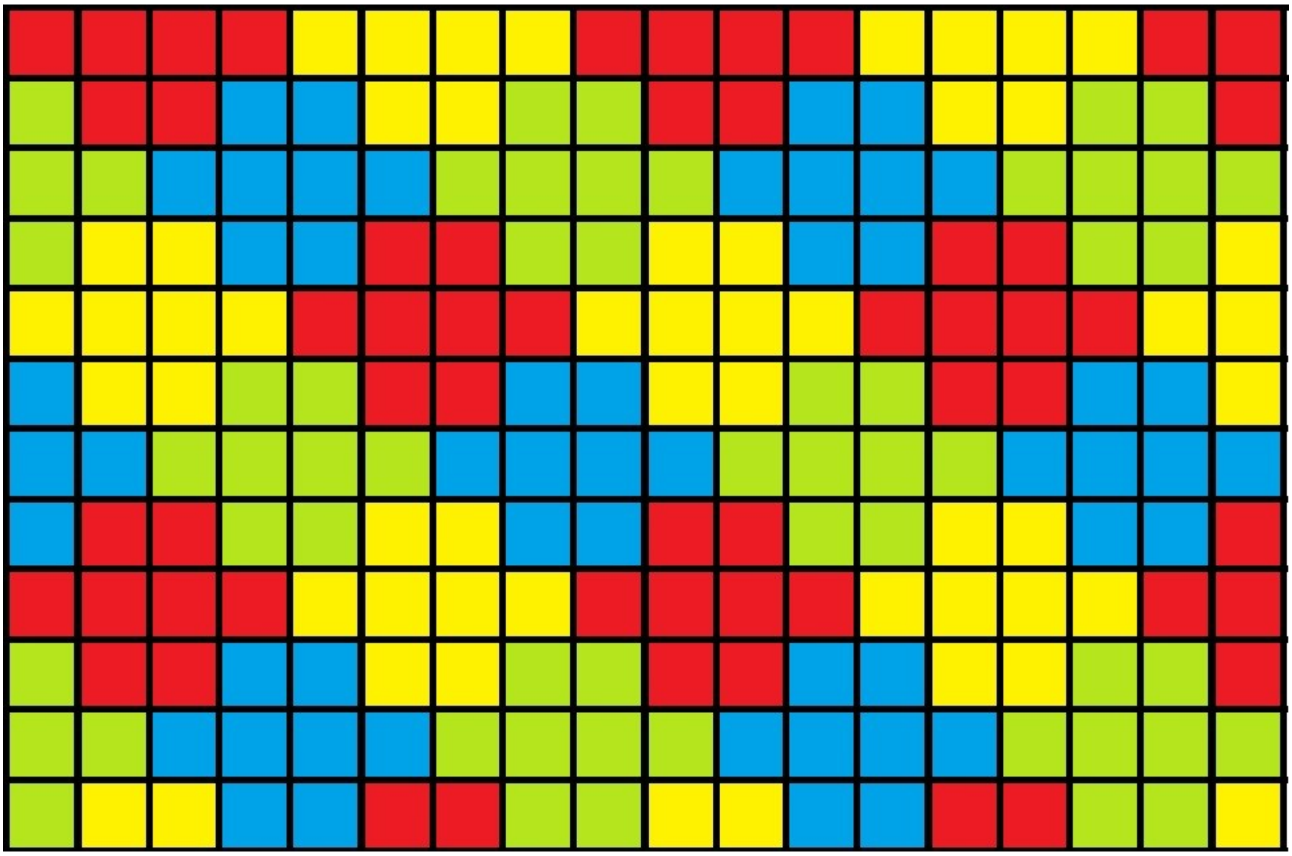


Par passage à la limite, quand n devient très grand ce modèle s'approche d'une distance non euclidienne. Donc le coloriage de ce plan devrait nous permettre de conjecturer un meilleur encadrement du nombre minimal de couleurs (m).

<u>En suivant ce modèle nous avons obtenu à la main les coloriages suivants :</u>
Pour un n impair, le motif le plus simple est toujours le même :



Pour un n pair, exemple pour n = 4



Mais on ne trouve pas de motif qui convienne pour tout n pair.

IV/ Algorithme de coloriage

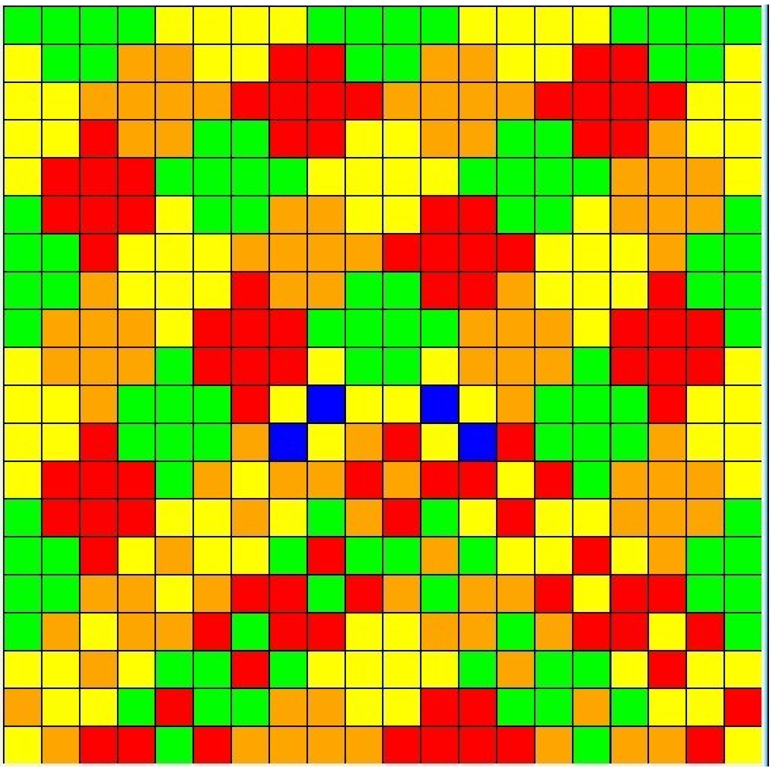
Le remplissage de ce genre de grille étant fastidieux, on implémente en Python un algorithme capable de remplir une grille de taille finie en un nombre de couleurs donné (si possible).

Nous avons utilisé le programme pour des n pairs en faisant varier différentes grandeurs.

1) Nombre de couleurs

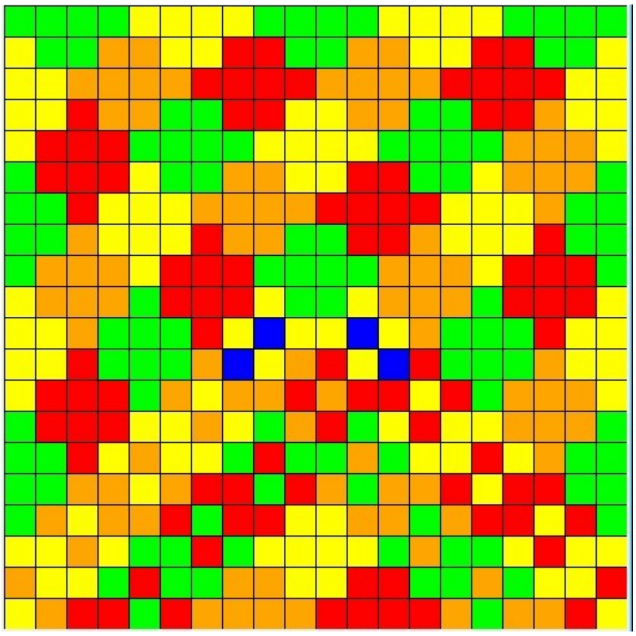
L'algorithme étant économe, 5 couleurs lui suffisent pour paver n'importe quelle grille (même lorsqu'on ne le lui impose pas). Mais la nécessité d'utiliser une cinquième couleur peut-être remise en question.

Exemple de coloriage d'une grille de taille 20x20, pour n=4, avec pour consigne d'utiliser au maximum 9 couleurs.

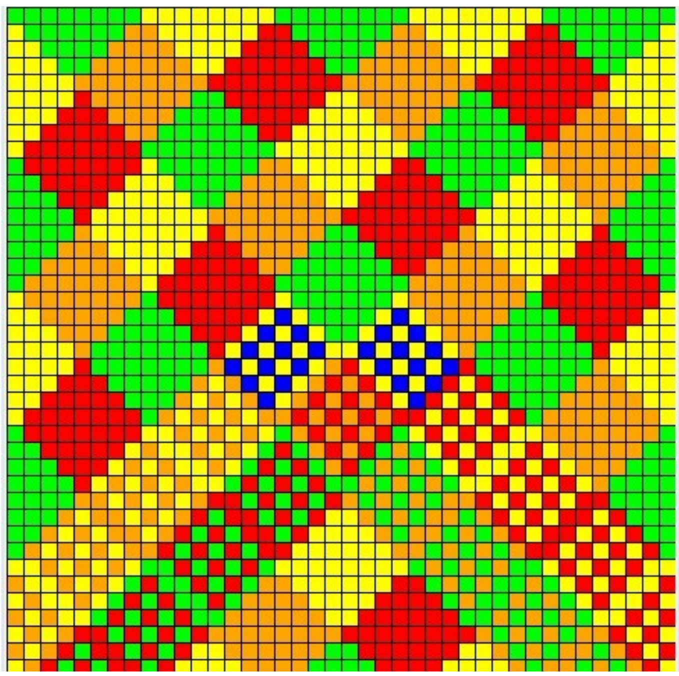


2) Paramètre n

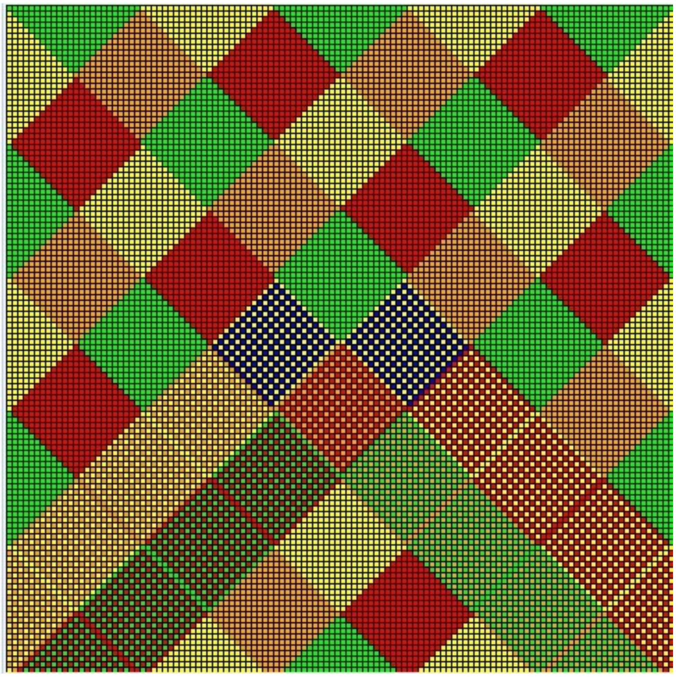
On augmente progressivement notre « n » en gardant une grille de dimension proportionnelle. (coté = 5n)



20x20 ; n=4 ; couleurs=5

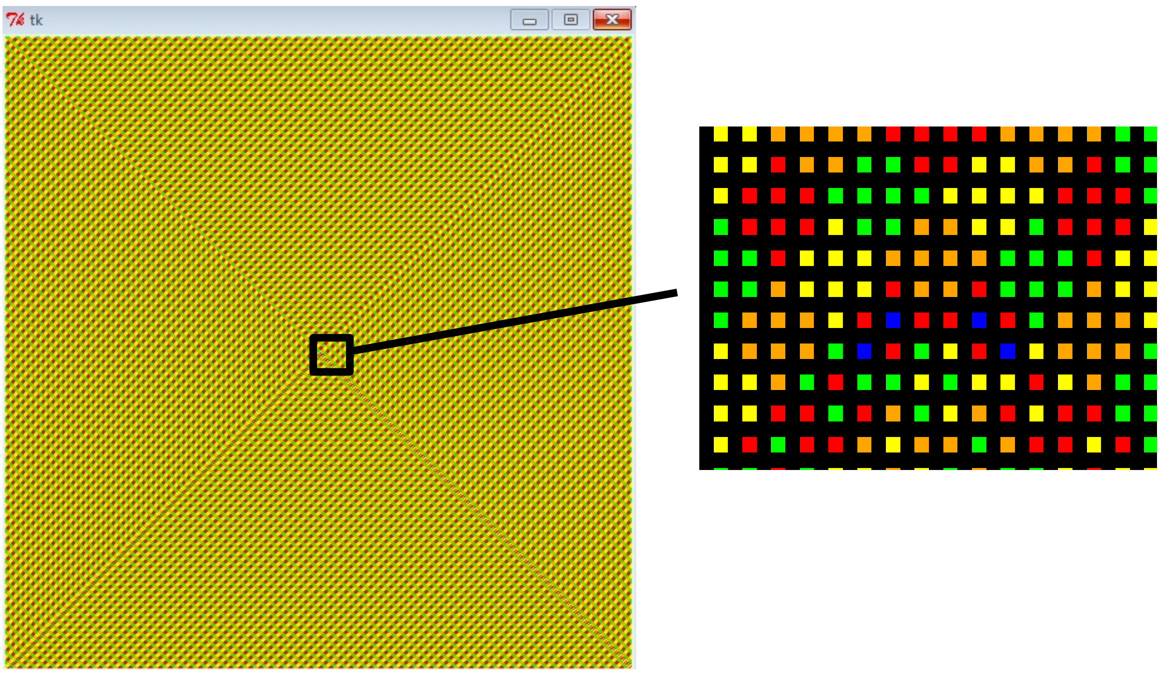


40x40 ; n=8 ; couleurs = 5



120x120 ; n=24 ; couleurs = 5

Plus n est grand, plus le motif ressemble à des carrés. De plus il semblerait que le nombre de carrés bleus soit en rapport avec le nombre de carrés dans la grille. Nous avons donc choisi d'essayer pour n=4, de calculer une grille immense.



En faisant varier la dimension de la grille on observe que le nombre de carré bleus dépend uniquement de n. On suppose donc qu'il s'agit d'un effet de bords.
Ainsi, tout cas confondus, l'algorithme nous a permis de montrer qu'il était possible de colorier en 4 couleurs n'importe quelle grille, avec des distances non-euclidiennes.
Toutefois ce modèle comporte des défauts, notamment pour n impair il permet de colorier le plan en 2 couleurs, or nous avons démontré que c'est impossible pour des distances euclidiennes. Il nous reste donc à trouver le lien entre ce modèle et la réalité.

Conclusion :

Dans ce travail, nous avons donc déterminé un encadrement certain de m ($4 \leq m \leq 7$) du nombre minimal de couleurs pour que deux points du plan situés à la distance euclidienne de l'unité soient toujours de couleurs différentes.

De plus, grâce à une approche numérique, nous pouvons conjecturer que si l'on mesure la distance de deux points $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$ du plan à l'aide de la distance $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$, le nombre minimal de couleurs vaut alors précisément $m = 4$.

Reste à démontrer cette conjecture établie grâce à notre algorithme de coloriage.

Remerciements à Nicolas Nguyen, notre professeur de mathématiques et encadrant, ainsi qu'à Vincent Guirardel, professeur à l'Université de Rennes1, qui nous a proposé ce sujet.