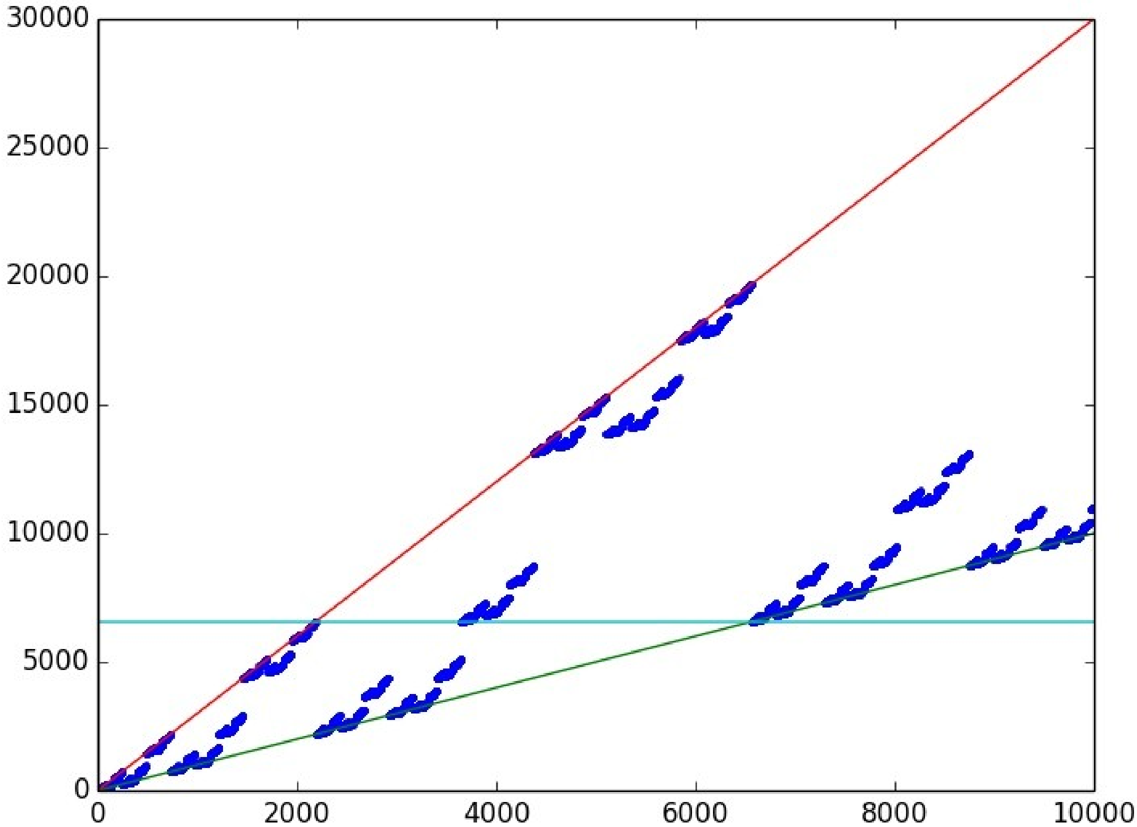
LA BASE BIZARRE



Un dossier réalisé par :
Guillaume Le Boucher, Erwan Boscher, Louis Le Damany
Étudiants en MPSI au lycée Rabelais de Saint-Brieuc

Sommaire

___________Introduction___________

Une fois que l'être humain eut accédé à l'abstraction des nombres puis à la conception d'ensembles de plus en plus étendus, il se heurta à de nouvelles difficultés. Pour représenter des nombres plus grands, on ne peut pas multiplier les doigts, des cailloux ou autres objets. On ne peut pas non plus répéter un même mot d'une manière illimitée, ni créer à l'infini de nouveaux noms de nombres.
L'être humain se trouva donc désormais confronté à un problème : comment désigner des nombres élevés avec le moins possible de symboles ? C'est alors que vinrent les systèmes de numération.

Notre système de numération bizarre s'inspire de la base trois mais au lieu d'avoir '0', '1' et '2' comme chiffres nous choisissons d'avoir '0', '1' et ...'6' !!
Si on part du principe qu'un système de numération permet, et se doit, de représenter tous les nombres de manière unique, notre base bizarre ne sert absolument à rien !
En effet tous les nombres ne peuvent pas s'écrire dans cette base et pour ceux qui ont la chance d'avoir une écriture dans un tel système leur écriture n'est pas forcément unique.

Nous avons étudié au cours de l'année la codabilité et l'unicité d'un nombre en base bizarre. Nous avons pour cela puisé dans l'outil informatique et travaillé expérimentalement avec des algorithmes implémentés en Python.
Nous avons alors établi un algorithme bizarre qui permet de dire si un nombre est codable et donne toutes les façons de le coder.
Cet algorithme s'inspire de la méthode pour coder en base 3 au moyen de divisions euclidiennes successives par 3. Mais les divisions de notre algorithme sont justement un peu bizarres. En effet, elles laissent la possibilité d'avoir un reste de 6. (voir p. 10)

__________Systèmes de numération__________

1°) <u>La base :</u>

<u>Définition</u> : **Système de numération** C'est une méthode qui permet l'écriture et la lecture des entiers naturels.

- Un *système de numération* est défini par le choix arbitraire d'une *base de numération* (entier naturel *a* égal au nombre de symboles appelés *chiffres* qui seront utilisés) et par certaines règles de position. Pour représenter et nommer les *a* chiffres, *a* symboles et *a* noms sont donc nécessaires.

Le système le plus couramment utilisé est le système de numération décimale ($a = 10$), dont l'origine est le nombre de doigts. Les symboles utilisés sont alors les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
Le système de numération binaire ($a = 2$) est utilisé, pour des raisons d'ordre technologique, dans les machines, en particulier les ordinateurs électroniques. Les symboles utilisés sont alors les chiffres 0 et 1. Les calculatrices utilisent aussi le système en base 8, ou système octal. Le système sexagésimal ($a = 60$) est utilisé en particulier pour les mesures du temps et des angles.

La représentation écrite des naturels se fonde sur le fait que tout naturel peut se mettre de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire de puissances de la base choisie, les coefficients de la combinaison étant choisis parmi les chiffres.

Par exemple, en base 10:
$1789 = 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 9 \times 10^0$.
Pour écrire 9 en base 2, on a :
$9 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, d'où l'écriture de 9 en base 2 : $(1\,001)_2$

- la *base trois (ternaire)* est une base de numération selon les puissances croissantes de 3 avec pour seuls chiffres 0,1 et 2. Elle est couramment utilisée en informatique, elle permet de transporter plus d'informations que le binaire car elle contient un état logique en plus.

<u>Exemple :</u>
$21 = 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0$
d'où l'écriture de 21 en base 3 est : $(210)_3$

2°) <u>Le bizarre :</u>

Dans le cadre de nos recherches nous nous sommes intéressés à la base 3 mais avec quelques modifications.
En effet, vous l'aurez compris en base 3, normalement, nous avons les chiffres 0,1 et 2 mais nous avons décidé d'avoir une base un peu bizarre avec les chiffres 0,1 … et 6 !!!
Cette base de numération bizarre est une combinaison linéaire de puissance de 3. Le chiffre 6 n'est pas seulement un symbole dans cette base mais il compte comme le nombre 6 lorsqu'il multiplie une puissance de 3.

Exemple :
$15 = 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 6 \times 3^0$
D'où l'écriture de 15 en base bizarre est : $(106)_{bb}$

Pour mieux comprendre comment les entiers sont codés en base bizarre, calculons les premiers nombres bizarres :

- $(00)_{bb} = 0$
- $(01)_{bb} = 1$
- $(06)_{bb} = 6$
- $(10)_{bb} = 3$
- $(11)_{bb} = 4$
- $(16)_{bb} = 9$
- $(60)_{bb} = 18$
- $(61)_{bb} = 19$
- $(66)_{bb} = 27$

On peut aussi représenter cette base bizarre à l'aide d'un « boulier bizarre », chaque tige de ce boulier correspond à une puissance de 3. Sur chacune des tiges il y a 6 boules, une libre qui correspond au «1» et 5 liées entre elles pour ainsi ne pouvoir faire que 0, 1 et 6 . (voir animation au stand).

3°) Problématique :

Cette nouvelle base de numération soulève beaucoup de questions, notamment :

Tous les entiers naturels sont-ils codables en base bizarre ?

- Si tel est le cas , y a-t-il unicité de l'écriture d'un entier en base bizarre ?
- Si tel n'est pas le cas, quels critères permettent de reconnaître un entier codable d'un entier non codable ?

Peut-on prévoir si un nombre sera codable ? Sera codable de façon unique ?
Quelle est la densité des nombres codables ? Quelle est la probabilité qu'un nombre soit codable ? Qu'un nombre soit codable de façon unique ?

Codabilité

On peut remarquer que 7 n'est pas codable en base bizarre donc certains nombres peuvent être codés en base bizarre et d'autres non. Quels sont alors les critères de non codabilité ?

1°) De la base 3 à la base bizarre :

a) Terminaison :

Nous avons entrepris d'étudier le nombre d'abord dans sa représentation en base 3 avant de le mettre en base bizarre afin d'identifier des motifs de non-codabilité présents dans le nombre en ternaire. Nous avons pu en déduire le théorème suivant :

Théorème :

Les nombres congrus à 2 modulo 3 ne sont pas codables en base bizarre

- **Preuve:** soit n un nombre entier codable en base bizarre : $n = (a_N a_{N-1} ...... a_1 a_0)_{bb}$

Alors n est congru à a_0 modulo 3 d'où :

$n \equiv 0$ [3]

ou

$n \equiv 1$ [3]

Par contraposée, nous avons établi que si $n \equiv 2$ [3], alors n n'est pas un entier codable. CQFD

Dans l'esprit de la preuve précédente nous avons cherché d'autres terminaisons en base 3 qui ne seraient pas codables en base bizarre.

Proposition :

Les nombres se terminant par les motifs $(21)_{bb}$ et $(210)_{bb}$ dans leur représentation en base 3 ne sont pas codables en base bizarre.

b) Motifs de non-codabilité :

Nous avons aussi remarqué, grâce à des algorithmes, que certains motifs, quelle que soit leur place dans l'écriture en base 3, ne sont jamais codables :

Proposition :

Les nombres contenant les motifs $(211)_{bb}$ et $(212)_{bb}$ dans leur représentation en base 3 ne sont pas codables en base bizarre

Nous avons alors cherché la probabilité qu'un de ces motifs apparaissent dans la représentation d'un nombre en ternaire. C'est alors que nous découvrîmes la formule de Poincaré :

$$p\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} p\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right)$$

La complexité de la formule ajoutée au fait que nous trouvions de plus en plus de motifs non codables nous ont amenés à opter pour une autre méthode !

2) Quels sont les nombres codables ?

Au lieu d'avoir une approche assez négative des choses en cherchant quel nombre n'était pas codable, nous avons décidé de dresser la liste des entiers en base bizarre directement :

- $(00)_{bb}$
- $(01)_{bb}$
- $(06)_{bb}$
- $(10)_{bb}$
- $(11)_{bb}$
- $(16)_{bb}$
- $(60)_{bb}$
- $(61)_{bb}$
- $(66)_{bb}$
- …
- …

Nous avons alors pensé que si la liste contenait n entiers, il y avait n entiers codables.
C'est dans cette idée que nous avons élaboré un algorithme calculant la densité dans «entier bizarre». A notre plus grande surprise lorsqu'on va jusqu'à 243 nous obtenons une densité de moins de 40% . Il n'y a alors plus de doutes … l'écriture d'un entier en base bizarre n'est pas unique !!

Unicité

Afin d'identifier la source de la pluralité de l'écriture nous avons mis au point un algorithme qui nous donne tous les nombres apparaissant plusieurs fois dans la liste des codables.

1) Motifs équivalents :

Et en effet nous avons pu montrer que :

Théorème :

En base bizarre :

$$\mathbf{(060)_{bb}=(116)_{bb}}$$
$$\mathbf{(100)_{bb}=(016)_{bb}}$$

- **Preuve :**

$9 = 1 \times 9 + 0 \times 3 + 0 \times 1 = 0 \times 9 + 1 \times 3 + 6 \times 1$

D'où en base bizarre 9 a deux écritures : (100) et (016).

$18 = 0 \times 9 + 6 \times 3 + 0 \times 1 = 1 \times 9 + 1 \times 3 + 6 \times 1$

D'où en base bizarre 18 a deux écritures : $(060)_{bb}$ et $(116)_{bb}$.

CQFD

2) Critère de non unicité

Parmi tous les codages à 3 symboles, à 4 symboles, nous avons pu montrer que les seuls motifs de non unicité sont ceux exhibés précédemment, nous conjecturons donc :

Conjecture :

Un codage n'est pas unique si et seulement si il contient les motifs : $(016)_{bb}$, $(116)_{bb}$, $(060)_{bb}$, $(100)_{bb}$ dans son écriture en base bizarre !

Remarque : l'apparition multiple de certains nombres vient uniquement du fait que les motifs équivalents apparaissent plusieurs fois dans sa représentation en base bizarre.

La probabilité qu'un nombre possède plusieurs codages revient alors à la probabilité d'apparition d'un motif équivalent dans son écriture, nous en arrivons encore à la formule de Poincaré.

_________Outil informatique_________

Nous avons cherché à représenter sur un graphique tous les nombres codables en base bizarre.

1) <u>Représentation de la suite des nombres codables :</u>

a) <u>Application bizarre :</u>

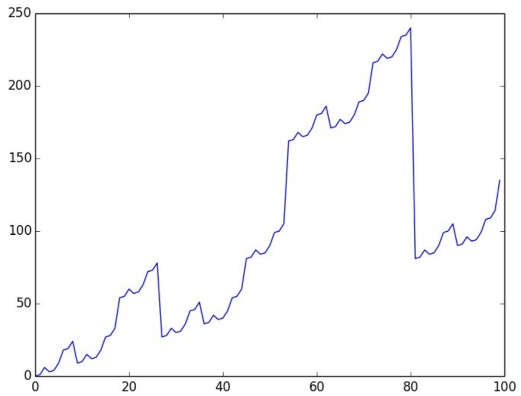
Nous avons développé une application qui prend un entier n, le représente en ternaire puis transforme tous les «2» en «6» et enfin retourne l'entier u_n auquel correspond cette représentation en base bizarre . Nous avons alors pu définir une suite.

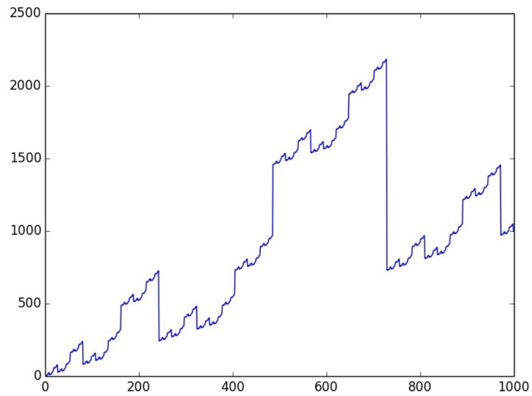
<u>Exemple</u> :

$$16 \longrightarrow (121)_3 \longrightarrow (161)_{bb} \longrightarrow 28$$

L'image de 16 par l'application bizarre est 28, soit u_{16}=28.

Graphiquement cela donne les courbes suivantes :

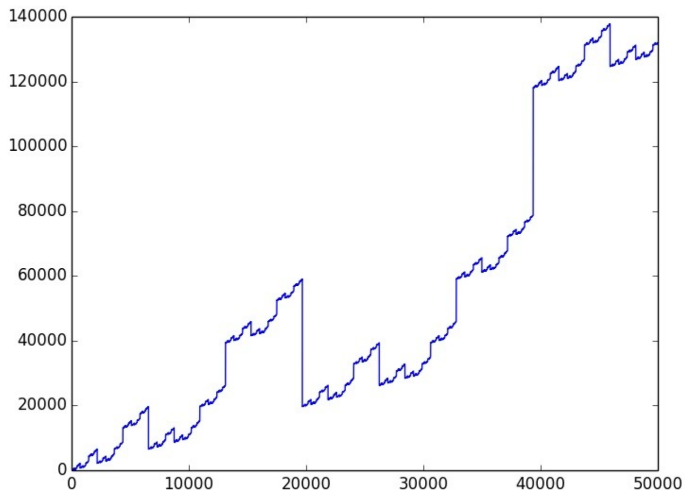




Il s'agit bien de la représentation d'une suite, malgré le trait continu, la fonction n'est évidemment pas continue.

On a ici représenté les 100 premiers termes de la suite, puis les 1000 premiers termes de la suite pour finir avec les 50 000 premiers termes de la suite.

Clairement, nous pouvons remarquer des motifs auto similaires ! Ceci nous a amené à définir une suite de « sauts » pour passer d'un entier codable au suivant.



b) <u>Suites extraites :</u>

Soit (U_n) la suite des sauts dans la suite (u_n) définie précédemment. C'est-à-dire

$$\text{Pour tout entier non nul n,} \quad U_n=u_{n+1}-u_n$$

On peut remarquer qu'il n'y a que deux types de saut. Lorsqu'on perd tous les '6' pour gagner un '1' ou lorsque les '1' passent en '6' nous pouvons alors définir deux suites extraites :

$$\mathbf{U_{(3\wedge q)(3n+1)} = 3 - 2 \times 3^q}$$
$$\mathbf{U_{(3\wedge q)(3n+2)} = 3 + 2 \times 3^q}$$

<u>2)Algorithme fondamental du bizarre :</u>

L'algorithme bizarre est un algorithme permettant de déterminer l'écriture en base bizarre d'un entier.

a) <u>Description de l'algorithme :</u>

Soit n un entier naturel, on cherche directement toutes ses représentations en base bizarre.
L'algorithme se développe sous la forme d'un arbre, chaque sommet de l'arbre correspondant à un entier restant à coder et ses fils correspondent aux chiffres de la base bizarre '0', '1', et '6'.
Partant d'un entier initial à coder, on teste trois choses :

- si $n \equiv 2$ [3] l'entier n'est pas codable en base bizarre !! On pose le chiffre 'E' pour échec et il reste à coder 2
- si $n \equiv 1$ [3], on posera le chiffre '1' et il reste à coder (n-1)//3
- si $n \equiv 0$ [3], en ce cas, deux branches sont possibles
    - on pose le chiffre '0' et il reste à coder n//3
    - on pose le chiffre '6' et il reste à coder (n-6)//3

Et ainsi de suite …

Après $N = E(\log_3(n))+1$ itérations (E() désigne la partie entière), l'algorithme se termine avec deux issues possibles :

- soit toutes les branches se terminent avec 'E' auquel cas l'entier n n'est pas codable en base bizarre,
- soit il y a des branches qui terminent avec un reste à coder 0, ce qui veut dire que l'entier n est codable !! il suffit alors de remonter ces différentes branches pour obtenir toutes les écritures de l'entier n en base bizarre.

b) <u>Conséquences :</u>

Cet algorithme sonne comme une finalité dans notre recherche. En effet il répond entièrement aux questions de la codabilité et de l'unicité du codage d'un entier puisqu'il permet d'obtenir tous les codages possibles d'un nombre en base bizarre.

__________Conclusion__________

Pour conclure, nous avons répondu à toutes les questions que nous nous sommes posées, et ce grâce à notre algorithme fondamental du bizarre qui prend un nombre, nous dit s'il est codable ou non, et nous donne en prime son ou ses écritures en base bizarre. Cependant la recherche n'est pas terminée !!

En effet, il reste tant de pistes à explorer, tout d'abord nous essaierons de démontrer toutes nos propositions et notre conjecture citée plus haut :

<u>Un nombre n'est pas unique si et seulement si il contient les motifs : (016), (116), (060), (100) dans son écriture en base bizarre !</u>

Nous pourrions envisager, grâce aux suites extraites décrivant les différents sauts, avoir une formule générale nous donnant les nombres codables. Il faudrait pour cela procéder à une sorte d'intégration sur la suite.

Ensuite, comme il nous a été proposé sur notre stand à Angers pour l'exposition « Maths en Jeans », pourquoi ne pas changer le 6 qui apparaît dans notre base bizarre en 7 ou 5 par exemple. Le chiffre 6 n'est t-il pas un cas particulier car il est à la fois multiple de 2 et de 3 ? Ferions-nous les mêmes observations avec un autre chiffre à la place du 6 ?

Sur un plan plus personnel, l'année que nous avons passée à rechercher sur notre sujet fut remplie de découvertes et d'échecs. Il y avait des semaines où tout s' enchaînait très vite, on trouvait de nombreux théorèmes et propositions, et d'autres où c'était le calme plat, ce fut très frustrant. Mais au final nous sortons grandis de cette expérience, avec l'envie d'expliquer à tout le monde notre sujet !

Enfin nous tenons à remercier Vincent Guirardel, chercheur de Rennes qui nous a donné notre sujet Ô combien original et qui nous a guidé lors de séminaires ainsi que Nicolas Nguyen notre professeur de mathématiques qui nous a guidé tout au long de l'année au cours de séances hebdomadaires.