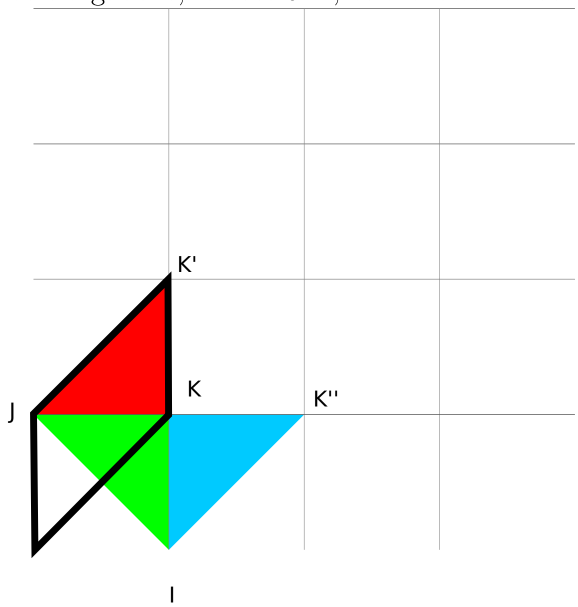
Sujets Maths en Jeans

Vincent Guirardel

October 9, 2012.

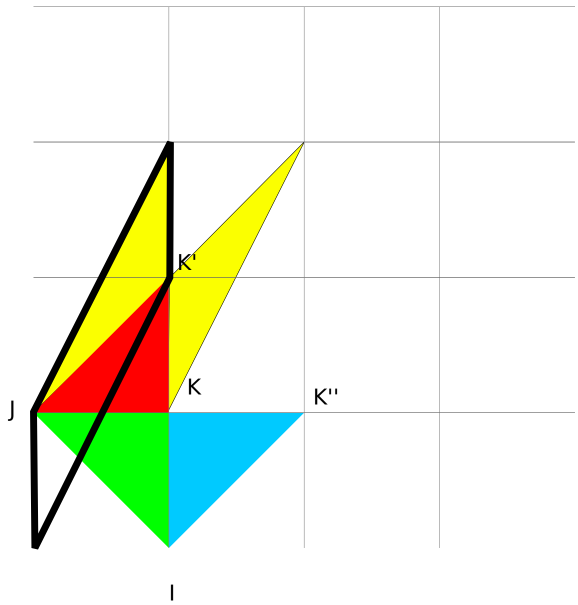
1 Le labyrinthe des nombres

Le plan du labyrinthe est construit ainsi. Toutes les pièces sont triangulaires. La première pièce est le triangle rectangle vert IJK. L'origine est $O = (0, 0)$. IJ est le segment "de base", par lequel on entre dans le labyrinthe. On imagine donc une porte dans le côté IJ, et quand on entre, on voit à gauche, le côté JK, et à droite le côté KI.



On va construire deux nouvelles pièces du labyrinthe, une du côté gauche (rouge), une du côté droit (bleue). La pièce du côté gauche sera un triangle JKK', mais pas n'importe lequel: K' est le point tel que les 4 points $JK'KO$ forment un parallélogramme. En fait K' a pour coordonnées $(1, 2)$. Cette nouvelle pièce JKK' a une entrée par le segment JK, et 2 sorties: une a gauche par le segment JK', une a droite par le segment $K'K$.

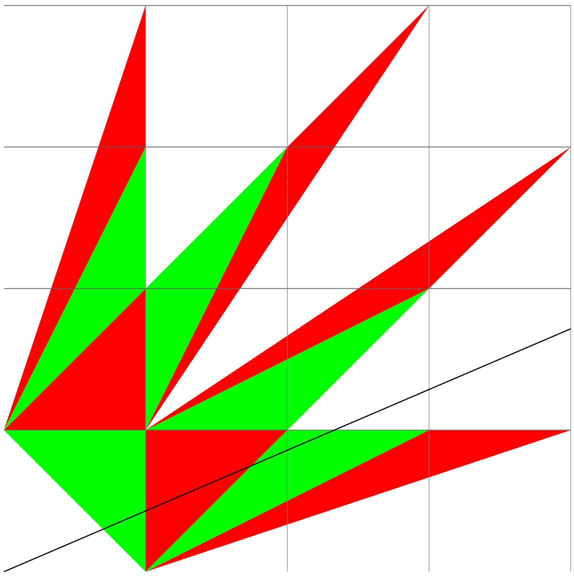
On peut de la meme facon construire une autre pièce triangulaire sur le côté droit de notre triangle IJK initial: c'est le triangle IKK'' tel que $OIK''K$ soit un parallélogramme. Lui aussi a une entrée (le segment IK), et 2 sorties: à gauche le segment KK'' et a droite le segment $K''I$.

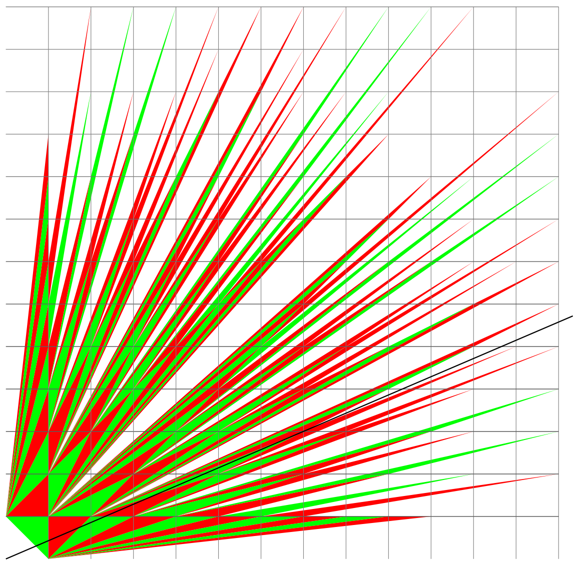


Maintenant, sur chacune de ces 2 pièces, on construit 2 nouvelles pièces adjacentes (donc 4 en tout), en suivant la meme regle: la pièce adjacente au côté JK' est un triangle $JK'L$ tel que $OJLK'$ soit un parallelogramme, etc. Son entrée est le segment JK', ses 2 sorties sont les segments $K'L$ et JL.

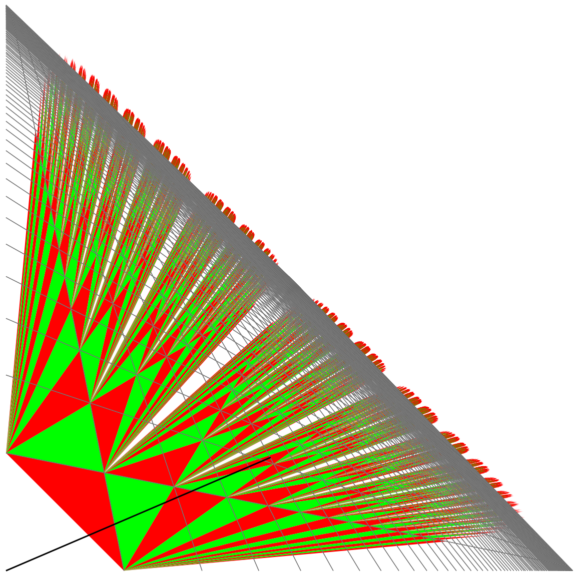
On peut recommencer cette construction à l'infini, et on obtient un labyrinthe infini. Chaque triangle a une entrée, et 2 sorties: gauche ou droite.

Voici le labyrinthe:

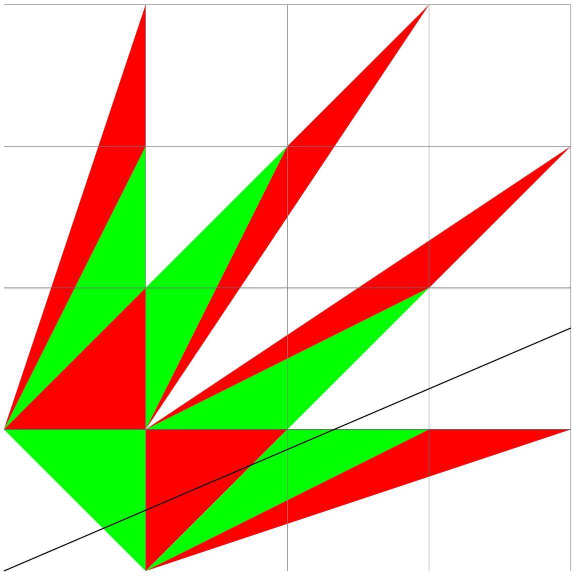




et en perspective:

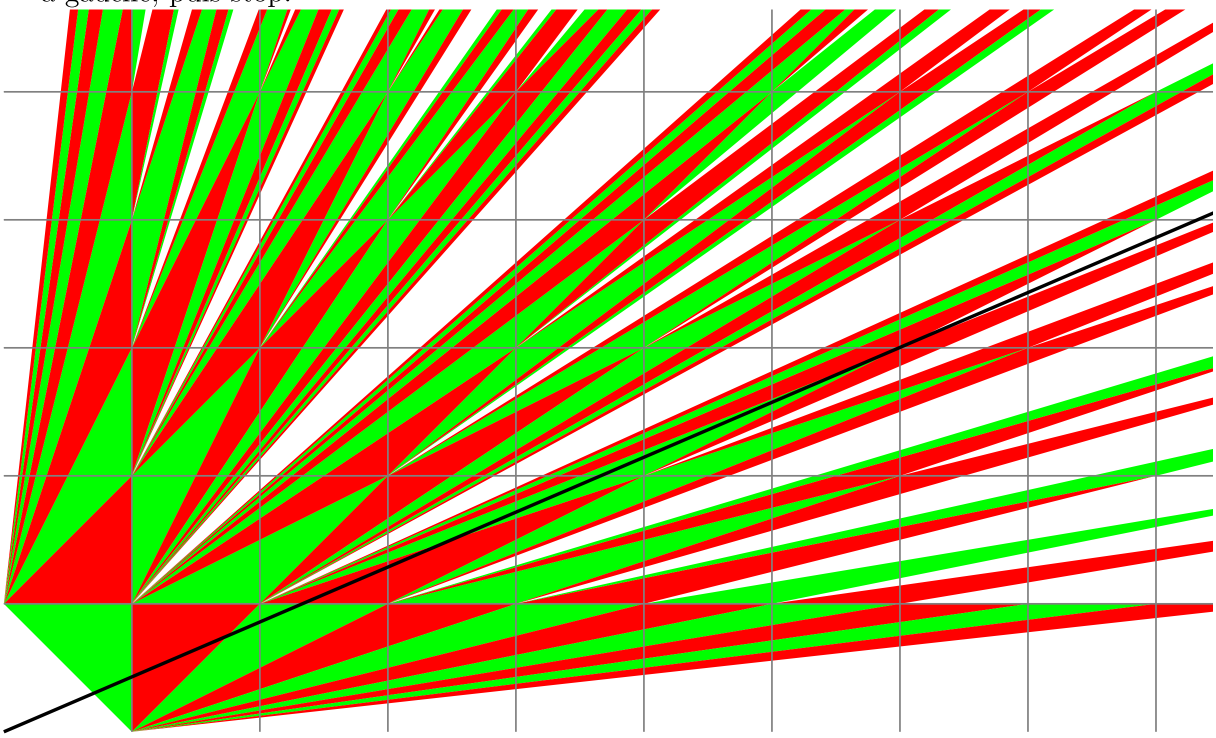


L'itinéraire d'un nombre Maintenant, on va associer un itinéraire a chaque nombre. J'ai pris le nombre $3/7 \simeq 0.428...$, et j'ai tracé la droite de pente $3/7$ passant par l'origine sur le labyrinthe.



Cette droite definit un itineraire dans le labyrinthe: elle entre dans le labyrinthe par l'entrée du premier triangle, elle sort de cette première pièce par sa sortie droite, puis elle continue sur la sortie droite de la pièce suivante, puis sort par la sortie gauche de celle d'après.

Si on continue à regarder, on voit que l'itinéraire complet prend 2 fois à droite, puis 2 fois a gauche, puis s'arrête. On s'arrête parce que la droite tombe pile sur le sommet du dernier triangle, donc on peut pas dire si elle sort à droite ou à gauche. On pourrait coder l'itinéraire par la suite de lettres $DDGGS$, ou $2D, 2G, S$, qui signifie: 2 fois à droite, 2 fois à gauche, puis stop.



De la même façon, on peut à chaque nombre associer un itinéraire, (fini si on finit par arriver un sommet d'un triangle, ou infini sinon...).

Questions:

- quels sont les nombres qu'on peut obtenir comme point d'arrivee d'un codage fini (qui finissent par un stop) ?
- Infini, mais périodique ?

- Quel est le codage de $\sqrt{2}$?
- Que devient un nombre si on on lui rajoute un G ? un D? si on lui enleve tous ses premiers G ? Si on remplace G par D et D par G ?

Pour se chauffer: Quelles sont les coordonnées des sommets des triangles ? Quel est le codage de 13/8 ? Quels sont les nombres dont l'adresse n'a que de G, que des D ?

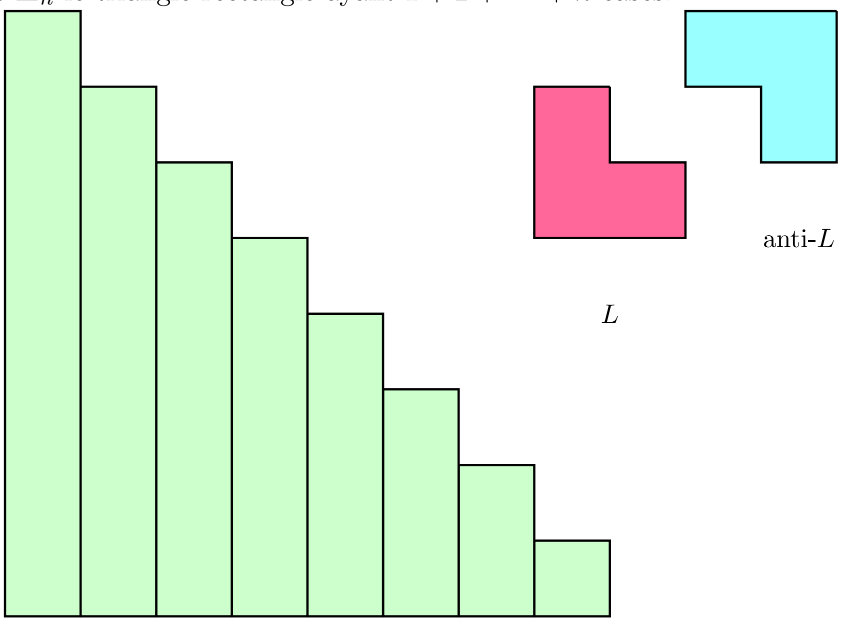
Autres questions possibles: Programmer le calcul de l'itineraire d'un nombre.

Est-ce que 2 nombres peuvent avoir le meme codage ?

Du codage au nombre: Est-ce que tout codage finissant par un stop correspond a un nombre ? lequel ? Est-ce qu'il y a un nombre qui correspond au codage GDGDGDGDGDGDGDG... ? Lequel ? Est-ce que tout codage infini correspond a un nombre ?

2 Pavages par des L

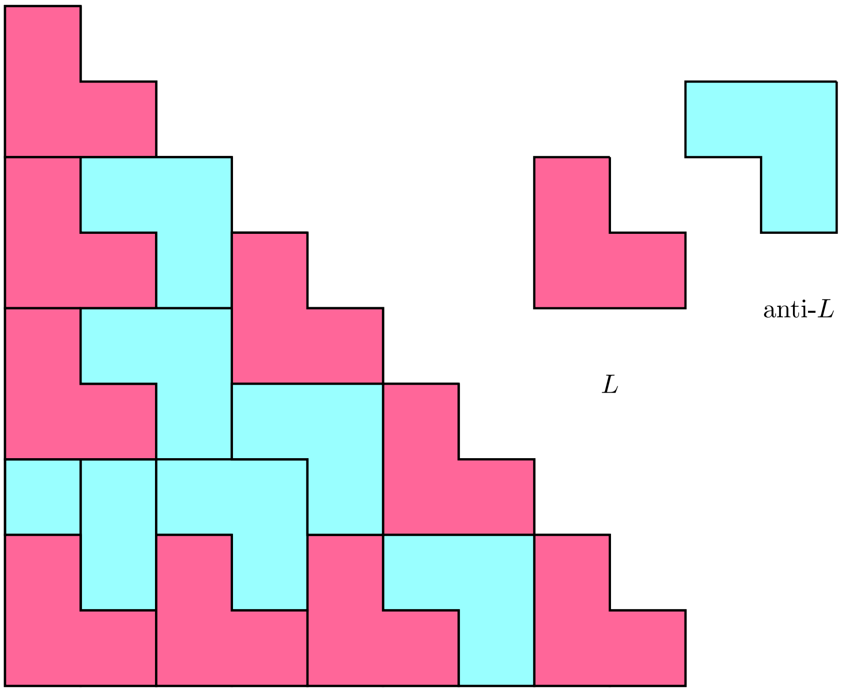
On considere Δ_n le triangle rectangle ayant $1 + 2 + \cdots + n$ cases.



Question 2.1. *Pour quelles valeur de n peut-on paver Δ_n par des L et anti-L (sans les tourner) ?*

Exemples: Δ_2 est pavable. Δ_3 ne l'est pas. Δ_4 non plus.

Δ_9 est pavable:

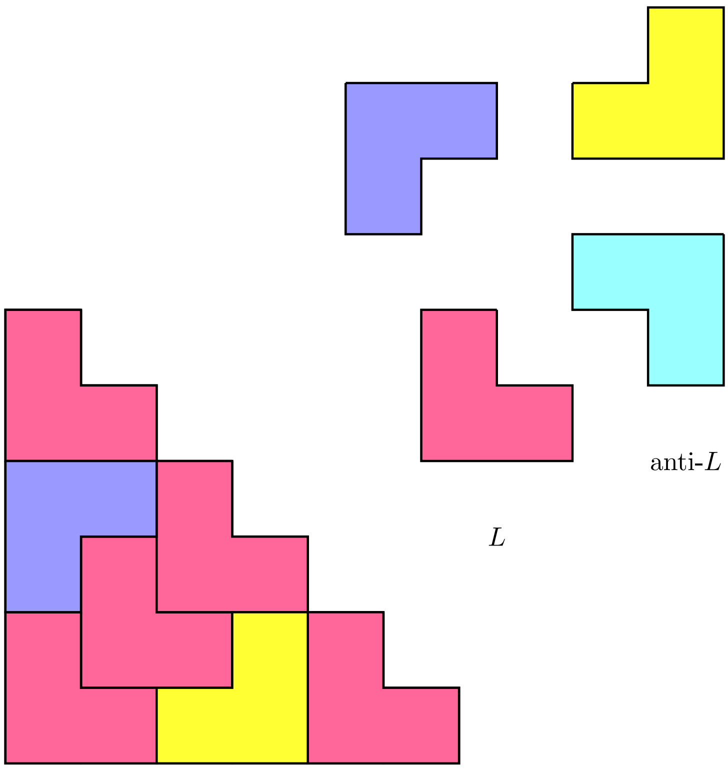


Variantes: Y-a-t-il une infinite de n qui sont pavables ?

Une infinite non pavable ?

Que se passe-t-il pour $n = 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, , ?$ Pouvez-vous le dire pour $n = 100, 101, 102, ...$? $n = 2012$? 2013 ? 2014 ? 2015 ? 2016 ?

On peut aussi poser la meme question si on autorise a tourner d'un quart de tour. Δ_6 est pavable dans ce cas.



Δ_6

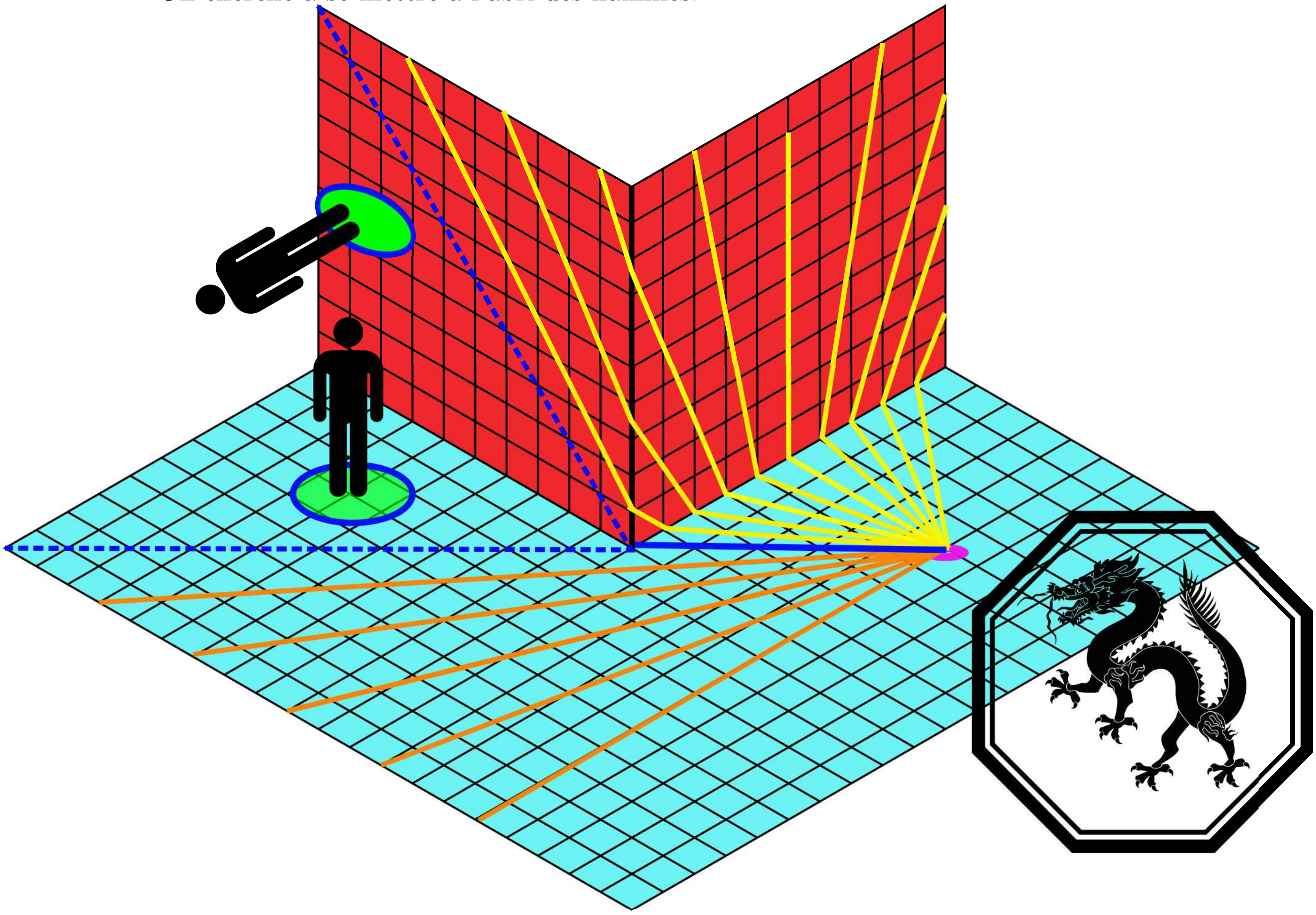
Meme question en remplacant Δ_n par des carres ? des rectangles ?

3 Le dragon sur une surface

On est dans un monde bidimensionnel, sur une surface obtenue en collant entre eux des polygones. Un cube par exemple, ou un icosaèdre, un tore, ou un tore à 2 trous

Un dragon se tient en un point, et crache du feu dans toutes les directions. Les flammes se déplacent en ligne droite, mais le long de la surface: lorsqu'elles rencontrent une arête, elles continuent en ligne droite de l'autre coté.

On cherche a se mettre a l'abri des flammes:

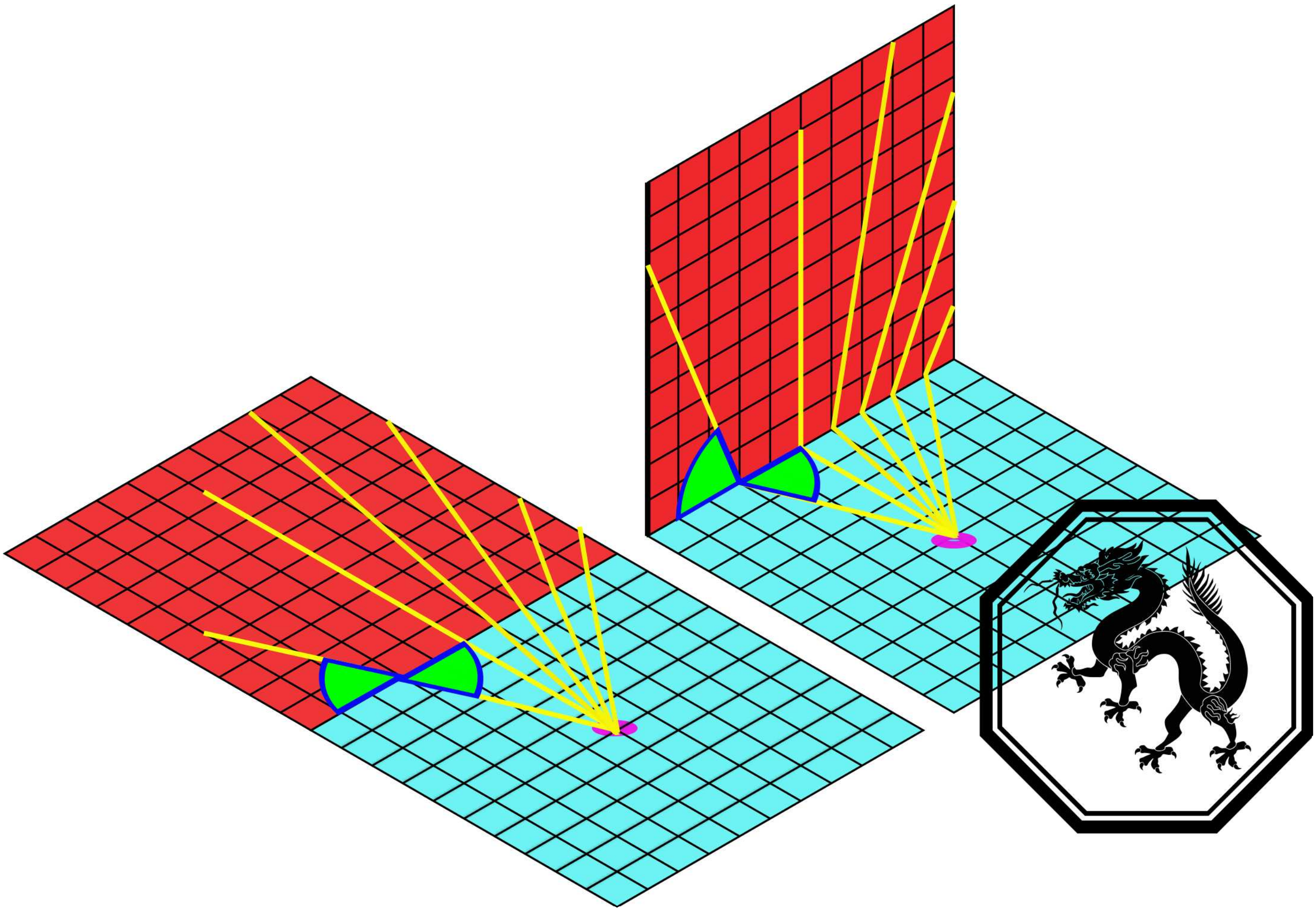


Dans les 2 zones vertes, le bonhomme est à l'abri des flammes, mais ce monde est une surface *infinie*.

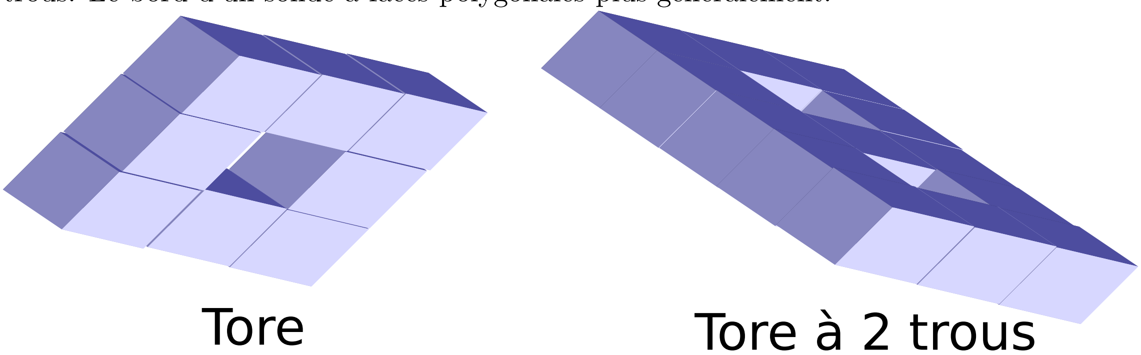
Question. *Existe-t-il une* surface *finie, sans bord, et une position pour le dragon, telle qu'on puisse trouver une zone (d'aire non nulle) à l'abri des flammes ?*

Cas particuliers: peut-on trouver un abri sur un parallélépipède, quelle que soient ses dimensions ? Et sur une pyramide ? Sur un polyèdre régulier ? Sur un "tore" ou un "tore à plusieurs trous" ? A chaque fois, on peut aussi faire varier les dimensions.

Règles de déplacement des flammes. Les flammes vont tout droit. Lorsque la flamme traverse une arête (= côté d'un polygone), l'angle de sortie est le même que l'angle d'arrivée: si on applatissait les 2 polygones traversés dans un plan, la trajectoire serait rectiligne. Si une trajectoire de la flamme touche un sommet, on ne sait pas trop comment continuer, donc on décide que la flamme s'y arrête.



Règles concernant la surface Précisions: la surface est supposée finie, c'est à dire obtenue en recollant ensemble un nombre fini de polygones. Exemples: la surface d'un parallélépipède, une pyramide, un polyèdre régulier, la surface d'un tore, ou d'un tore à 2 trous. Le bord d'un solide à faces polygonales plus généralement.



La surface ne doit pas non plus avoir de bord: les flammes doivent pouvoir continuer leur chemin à la traversée de chaque arête. Par exemple, la surface d'un cube auquel on a enlevé une de ses 6 faces forme une sorte de bol. Cette surface est interdite car les 4 côtés de la face enlevée forment un bord sur lequel les flammes sont bloquées.

Autre façon de produire une "surface": le terrain de *Pacman*. C'est un rectangle, dans lequel lorsqu'on traverse le côté droit, on se retrouve sur le côté gauche (et vice versa) et losrqu'on traverse le côté haut, on se retrouve sur le côté bas (et vice versa). Les flammes se déplacent dans ce monde de la même façon. Plus généralement, on peut définir un monde à partir de polygones, et en appariant des côtés ayant la même longueur; chaque côté doit être apparié à un autre côté (sinon c'est un bord: les flammes sont bloquées), et un seul !

Notons qu'on cherche une zone à l'abri qui soit d'aire non nulle. Un sommet ou un segment “à l'ombre d'un sommet” ne marche pas.