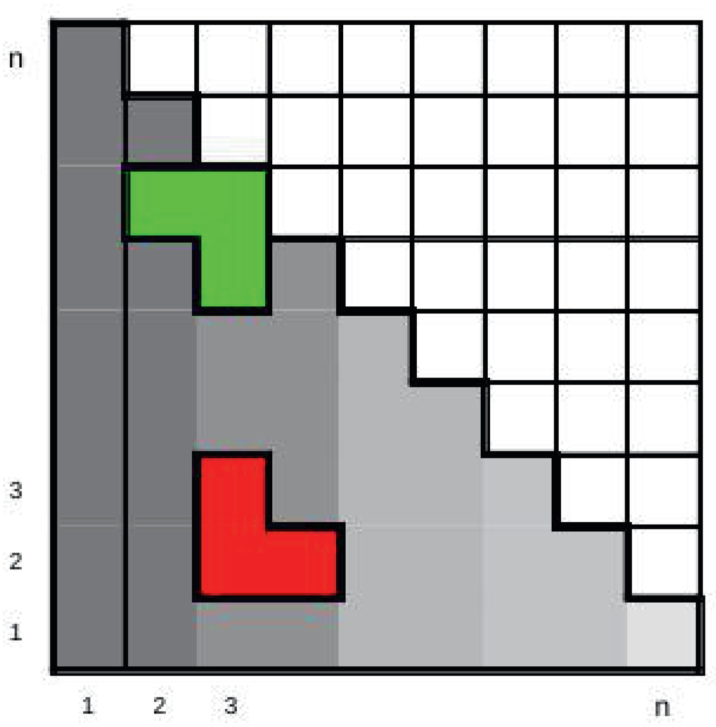
Atelier Mathématique du Lycée Rabelais 2012-2013

PAVAGES EN L ET ANTI-L

Par Benjamin DAGORN et Alexandre HENRIOT

Les règles du jeu

On considère un triangle Δ_n constitué de n colonnes de hauteurs n, n-1, ..., 2, 1. On s'intéresse aux conditions pour que Δ_n puisse être pavé (recouvert sans chevauchement) à l'aide des deux motifs élémentaires (motif L) et (anti-L).

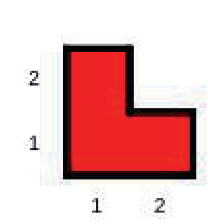


Le triangle Δ_n est constitué de n colonnes de hauteurs décroissantes.

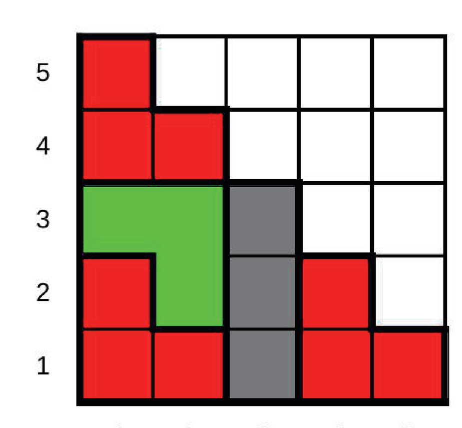
Exemples de pavages

Voici quelques exemples de pavages en et

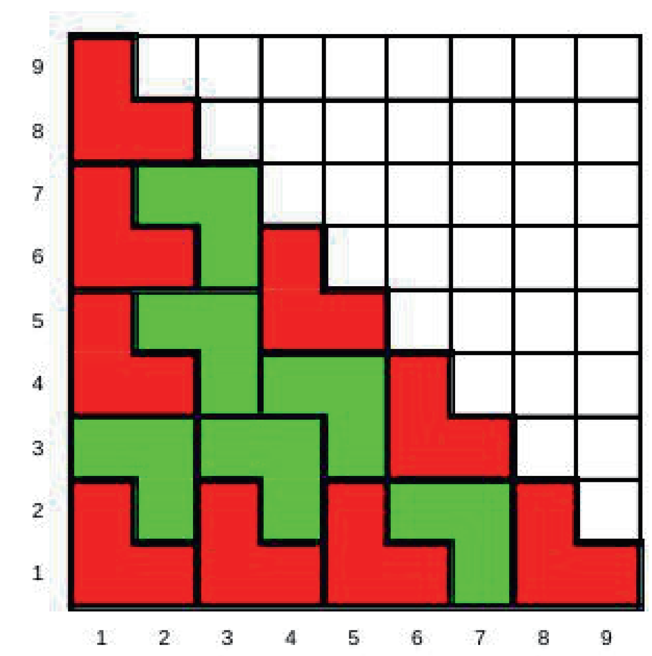
A noter : Δ_1,Δ_3, Δ_4, Δ_5, Δ_6, Δ_7, Δ_8 et Δ_{10} ne sont pas pavables.



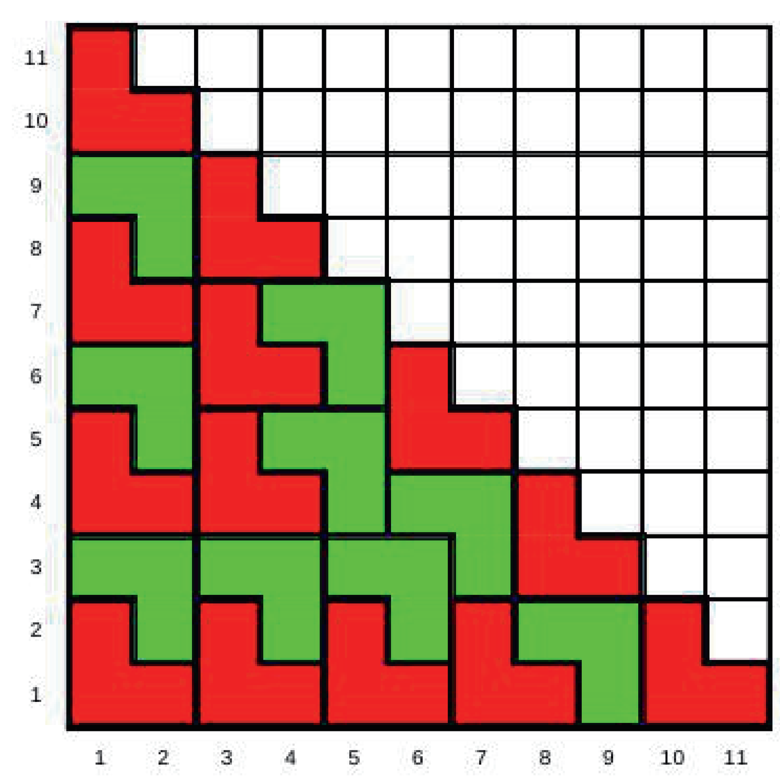
Δ_2 est un



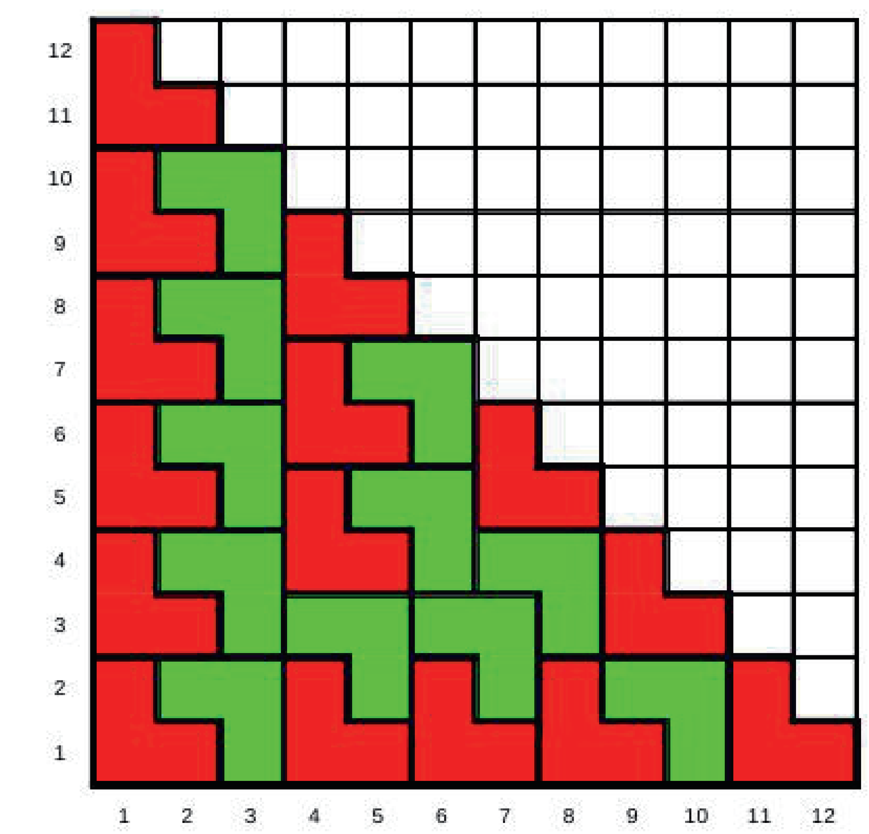
Δ_5 est non pavable.



Δ_9 est pavable.



Δ_{11} est pavable.



Δ_{12} est pavable.

Condition nécessaire

Pour que Δ_n soit pavable, il est nécessaire que son nombre de cases soit multiple de 3 !

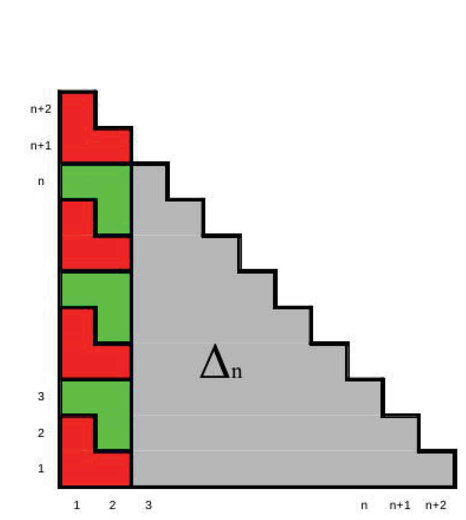
Proposition 1: Δ_n est constitué de n(n+1)/2 cases.
Si Δ_n est pavable, alors n(n+1) est multiple de 6.

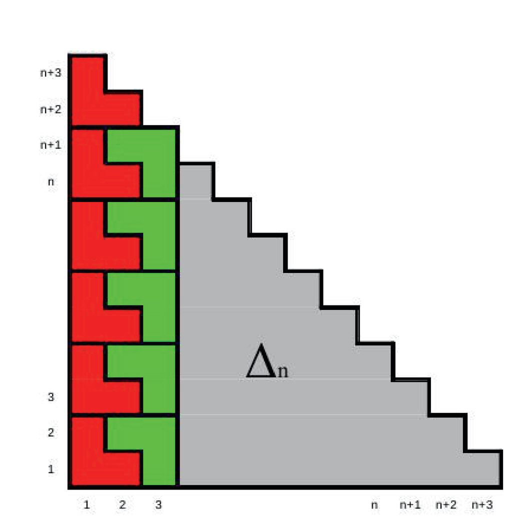
Règles de construction

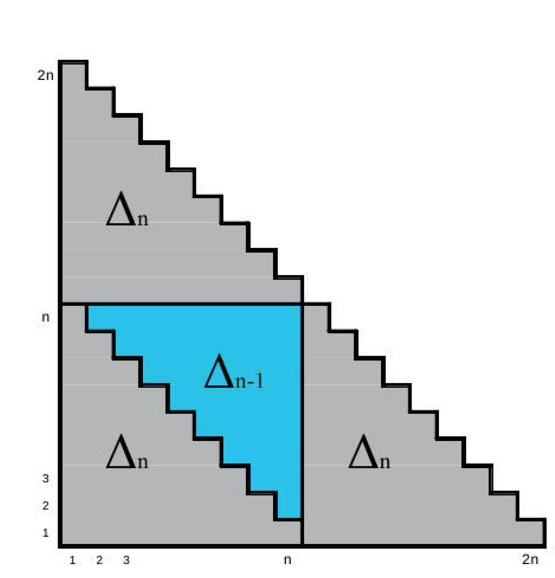
Partant d'un pavage de Δ_n, nous avons démontré des règles permettant de paver d'autres triangles.

Proposition 2: On suppose que Δ_n est pavable.
►Si n est multiple de 3 alors Δ_{n+2} est pavable,
►Si n+1 est multiple de 2 alors Δ_{n+3} est pavable.

Proposition 3: Si Δ_n et Δ_{n-1} sont pavables, alors Δ_{2n} et Δ_{2n-1} sont pavables.







Nos résultats

A l'aide de nos règles de construction, nous avons observé un cycle modulo 12.

Théorème 1: pour tout entier n
►Si n ≡ 0,2,9,11 [12] alors Δ_n est pavable,
►Si n ≡ 1,4,7,10 [12] alors Δ_n n'est pas pavable.

Conjecture : pour tout entier n
►Si n ≡ 3,5,6,8 [12] alors Δ_n n'est pas pavable.

Conclusions : grâce à nos résultats nous pouvons affirmer qu'il existe une infinité de n pour lesquels Δ_n est pavable, et une infinité de n pour lesquels Δ_n n'est pas pavable. Malgré nos nombreuses tentatives, nous n'avons pas réussi à montrer la conjecture.