Lycée Pierre Paul Riquet (Saint Orens)

Atelier Math en Jeans 2006/2007

Les nombres infinis

Travail réalisé par

Marc ALLAIRE; Lola DADILLON ; Coralie LEMAÎTRE,

Charlotte MONTACIÉ ; Alexandra PINEAU; Benjamin POILVÉ ;

Thomas WATRIGANT (seconde)

Clélia CORNUÉJOLS , Laetitia HARTER (TS)

Encadrés par

Vincent GUIRARDEL (chercheur)

Anne COPROS et Boris VÉRON (professeurs)

Sommaire :

Introduction

Vous connaissez les "nombres infinis décimaux" dont la lecture se fait normalement : de gauche à droite, et qui dont l'écriture décimale comporte une infinité de chiffres après la virgule. 0,123123123... par exemple.

Nous, nous avons travaillé sur un autre type de nombres infinis. C'est à dire un entier qui a la particularité de se lire de droite à gauche avec une infinité de chiffres vers la gauche. Certains de ces nombres ont une période que l'on note comme dans cet exemple : ...[682417]682416

On s'est demandé ce qui se passait si on utilise les règles de calcul habituelles.

- Par exemple la multiplication d'un nombre infini par un nombre fini :

$$\begin{array}{r} ...535353[53] \\ \times \quad 2 \\ \hline ...07070706 \end{array}$$

Voici quelques cas particuliers que nous avons remarqués au cours de nos recherches :

- Ici, un résultat surprenant : si on ajoute 1 au "plus grand" nombre infini que l'on imagine ...9999[9] :

$$\begin{array}{r} ...9999[9] \\ + \quad 1 \\ \hline ...000000 \end{array}$$

On obtient 0 !

- Voici une autre addition où la somme de deux nombres infinis est 1 :

$$\begin{array}{r} ...[682417]\,682416 \\ +\ \underline{...[317582]\,317585} \\ ...0000000000001 \end{array}$$

On verra plus loin une multiplication entre deux nombres infinis.

Mais ce que nous avons surtout étudié c'est la question des inverses et celle de la divisibilité de ces nombres.

I. Inverse d'un nombre fini N

On cherche X infini tel que : $\frac{1}{N} = X$

c'est à dire tel que $N \times X = 1$

On a cherché cet (ou ces…) inverse(s) à l'aide d'une multiplication à trous.

a) Impossible si N est pair :

Exemple : $X \times 2 = 1$

Il faudrait que deux fois un nombre infini soit égal a 1.

Or les multiplications qui impliquent des nombres pairs ont toujours des résultats pairs.

b) Même chose si N est un multiple de 5 :

5 fois un nombre infini donne un nombre dont le dernier chiffre sera 5 ou 0 ce qui ne remplit pas la condition précédente.

c) Inverse d'un autre nombre à un chiffre : 7

X	
N	7
Produit	
Retenue somme	
Retenue L1	
L1	

On cherche un nombre dont le produit par 7 finit par 1. Seul 3 est possible.

X		3
N		7
Produit	**2**	**1**
Retenue somme	0	
Retenue L1	2	
L1		1

Ensuite, on veut obtenir un 0 dans la case occupée par le 2. On doit pour cela chercher un nombre dont le produit par 7 finit par 8, car 2 est la retenue de la multiplication de 7 par 3. Seul 4 est possible.

X		4	3
N			7
Produit	**3**	**0**	**1**
Retenue somme	1	0	
Retenue L1	2	2	
L1		8	1

On peut continuer ainsi de suite à trouver des 0, et obtenir 1 comme résultat.

On remarque que, dans la table de multiplication de 7, tous les chiffres sont présents une fois et une seule. Il sera donc toujours possible de trouver un nombre qui nous permette de continuer la multiplication à trous, et ce nombre sera unique.

Donc 7 a un inverse, unique, qui est …[857142]857143

d) un autre exemple : inverse d'un nombre à deux chiffres : 19

X		
N	1	9
Produit		
Retenue somme		
Retenue L1		
L1		
Retenue L2		
L2		

On procède de la même manière que pour 7. On cherche un chiffre qui, multiplié par 9 donne un chiffre finissant par 1. Seul 9 convient.

X				9
N			1	9
Produit	**0**	**1**	**7**	**1**
Retenue somme		1	0	
Retenue L1			8	
L1			0	1
Retenue L2		0		
L2			9	

On cherche ensuite un nombre qui nous permette d'avoir un 0 à la place du 7. Il faut donc un 3 à la place du 0 de L1. Ce chiffre correspond au résultat de la multiplication de 9 par le deuxième chiffre de X qui ne peut être que 7.

X				7	9
N				1	9
Produit	**0**	**1**	**5**	**0**	**1**
Retenue somme		1	2	0	
Retenue L1			6	8	
L1			0	3	1
Retenue L2		0	0		
L2			7	9	

On obtient ainsi de suite un inverse de 19.

X		.	.	.	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	9
N																								1	9
Produit		**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
Retenue somme	0	0	1	2	2	2	1	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	2	0	
Retenue L1	0	0	0	4	6	7	8	3	6	2	5	7	3	1	0	0	4	1	5	2	0	4	6	8	
L1		0	0	0	5	3	2	1	6	3	7	4	2	6	8	9	0	5	8	4	7	9	5	3	1
Retenue L2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
L2		0	0	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	9	

Il existe et est unique, car, comme 7, la table de multiplication de 9 comporte tous les chiffres de 1 à 9 une fois et une seule.

De plus, cet inverse est périodique : si l'on s'intéresse aux colonnes de ce calcul, on remarque que tous les chiffres, résultats et calculs, retenues, sont compris entre 0 et 9. Comme cette colonne a une longueur fixe, il y a donc un nombre fini de colonnes possibles, il y aura donc un moment au bout duquel elle se répètera, ce qui entraînera la périodicité de X.

X		.	.	.	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	9
'N																								1	9
Produit		0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Retenue somme	0	0	1	2	2	2	1	2	1	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	2	2	2	0	
Retenue L1	0	0	0	4	6	7	8	3	6	2	5	7	3	1	0	0	4	1	5	2	0	4	6	8	
L1		0	0	0	5	3	2	1	6	3	7	4	2	6	8	9	0	5	8	4	7	9	5	3	1
Retenue L2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
L2		0	0	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	9	

Donc l'inverse infini de 19 est … [894736842105263157] 9

Pour ces mêmes raisons :

Tous les nombres finis qui se terminent par 1, 3, 7 ou 9 ont un inverse et un seul. De plus cet inverse est périodique

II Méthode pratique de calcul d'un inverse

Comme l'inverse réel d'un nombre entier a une écriture décimale périodique, nous avons cherché à comparer les périodes des deux écritures.

Conjecture :

Si on ajoute la période infinie à la période décimale cela donne 0.

exemple pour N = 7

.Période décimale : 1/7 = 0,[142857]…..

Ce qui correspond à : ……[857142]857143 et

```
     [142857] 142857
+ …[857142] 857143
  ...000000 000000
```

Avec cette méthode, on peut facilement trouver le nombre infini correspondant à une période avec la méthode de l'addition à trous (ou soustraction).

Formule:

Nous mettons notre conjecture sous forme algébrique.

En notant X l'inverse infini et Y l'inverse décimal

$$X = 10^{\infty} - (Y \times 10^{\infty} - Y)$$

Explication : pour N = 3, X = ...666666667 car ....666666667 × 3 = 1

Et Y = 1/3 = 0,3333………….

$Y \times 10^{\infty} =$ ...33333,3333333…

$(Y \times 10^{\infty} - Y) =$ ...33333 $\times 10^{\infty}$

$10^{\infty} - (Y \times 10^{\infty} - Y) =$ ...0000000 – ...3333333

= ...6666667

= X

Nous utilisons ici 10^{∞} comme opérateur qui nous permet de déplacer les périodes à l'infini.

Puis on enlève la période d'origine pour passer dans l'ensemble infini.

Nous prenons 10^{∞} comme une puissance de 10 dont le 1 se décale a l'infini vers la gauche : il ne reste que des 0.

Cette conjecture a été vérifiée par ordinateur sur de nombreux exemples mais n'est pas prouvée.

Remarque du correcteur : on notera les limites de la formule algébrique dans le cas de période de plusieurs chiffres (comment régler le décalage de la période dans l'écriture avec 10^{∞})

III Inverse d'un nombre infini Y

On cherche X infini tel que : $\frac{1}{Y} = X$

c'est à dire tel que $Y \times X = 1$.

a) Comme pour les entiers, cet inverse n'existe pas si Y se termine par 2 ou 5.

b) Si Y se finit par 1, 3, 7 ou 9, on peut trouver son inverse infini par la méthode de la multiplication à trous comme pour les nombres finis.

X	.	1	5	9	4	7	8	5	4	7	5	5	0	4	4	6	1	0	9	5	1	2	1	8	7
Y	.	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	3	1	2	3	1	2	3
Produit		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
Retenue somme	11	12	10	11	10	7	8	8	7	6	6	6	6	5	4	4	4	3	3	2	2	2	1	0	
Retenue L1	0	1	2	1	2	2	1	1	2	1	1	0	1	1	1	0	0	2	1	0	0	0	2	2	
L1		3	5	7	2	1	4	5	2	1	5	5	0	2	2	8	3	0	7	5	3	6	3	4	1
Retenue L2	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1		
L2		0	8	8	4	6	0	8	4	0	0	0	8	8	2	2	0	8	0	2	4	2	6	4	
Retenue L3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
L3		9	4	7	8	5	4	7	5	5	0	4	4	6	1	0	9	5	1	2	1	8	7		
Retenue L4	1	2	2	1	1	2	1	1	0	1	1	1	0	0	2	1	0	0	0	2	2				
L4		2	1	4	5	2	1	5	5	0	2	2	8	3	0	7	5	3	6	3	4	1			
Retenue L5	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1					
L5		4	6	0	8	4	0	0	0	8	8	2	2	0	8	0	2	4	2	6	4				
Retenue L6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						
L6		8	5	4	7	5	5	0	4	4	6	1	0	9	5	1	2	1	8	7					
Retenue L7	1	1	2	1	1	0	1	1	1	0	0	2	1	0	0	0	2	2							
L7		5	2	1	5	5	0	2	2	8	3	0	7	5	3	6	3	4	1						
Retenue L8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0								
L8		4	7	5	5	0	4	4	6	1	0	9	5	1	2	1	8	7							
Retenue L9	2	1	1	0	1	1	1	0	0	2	1	0	0	0	2	2									
L9		1	5	5	0	2	2	8	3	0	7	5	3	6	3	4	1								
Retenue L10	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1										
L10		0	0	0	8	8	2	2	0	8	0	2	4	2	6	4									

Mais cet inverse n'est pas forcément périodique, car la longueur de la colonne augmente à l'infini.

IV Critères de divisibilité des nombres infinis par des nombres finis

Nous avons travaillé sur la divisibilité des nombres infinis par des entiers et nous avons observé au cours de nos recherches que :

1) Dans certains cas, ce sont les mêmes règles de divisibilité que pour les entiers finis comme :

-*Par 2* : Quand le dernier chiffre est pair.

-*Par 5* : Quand le nombre infini se termine par 0 ou 5.

-*Par 10* : Quand le nombre infini se termine par 0.

2) Dans d'autres cas, les règles de divisibilité des nombres finis changent pour les nombres infinis :

exemple : ...654654654654654771 est-il divisible par 9 ?

Si on multiplie un nombre infini Y par 9, et que l'on trouve un nombre infini Z, alors c'est que Z est divisible par 9.

Il faut donc trouver Y tel que Y X 9 = ...654654654654654771

Mais, comme pour le calcul des inverses, on peut réaliser la multiplication à trou, car dans la table de 9, tous les chiffres de 0 à 9 sont présents dans les unités des résultats.

Ici, on obtient Y = … [850 517 183] 839 419

V Généralisation des questions de divisibilité

Diviser un nombre infini Z par un nombre infini Y revient à trouver X infini tel que

$$\frac{Z}{Y} = X \text{ c'est-à-dire tel que } Y \times X = Z.$$

On distingue deux cas :

<u>Premier cas</u> : Y se termine par 1, 3, 7 ou 9 et Z est quelconque. Il est possible de trouver X : il suffit de prendre $X = Z \times 1/Y$

<u>Deuxième cas</u> : Y se termine par 0, 2, 4, 5, 6 ou 8

- Soit le dernier chiffre de Z ne figure pas dans les derniers chiffres de la table de multiplication de Y. Dans ce cas, il est impossible de trouver X.
- Soit le dernier chiffre de Z figure dans les derniers chiffres de la table de multiplication du dernier chiffre de Y :

Un exemple : avec Y = ...[4825]4825 et Z = …[761325]761325

X										?
Y	...	5	4	8	2	5	4	8	2	5
										0
									0	0
								0	0	0
							0	0	0	0
Z		3	2	5	7	6	1	3	2	5

Pour obtenir 5 au résultat, il faut que X se termine par un chiffre impair, choisissons par exemple 1.

Ensuite, pour obtenir 2, il faudra que le deuxième chiffre soit un nombre pair.

On se trouve donc devant une multitude de possibilités car à chaque fois on peut avoir plus d'un choix, certains aboutissant et d'autres pas.

X									?	1
Y	...	5	4	8	2	5	4	8	2	5
		5	4	8	2	5	4	8	2	5
									?	0
									0	0
								0	0	0
							0	0	0	0
Z		3	2	5	7	6	1	3	2	5

<u>Unicité du quotient :</u>
Nous nous sommes alors demandé s'il ne pouvait pas exister plusieurs solutions pour X.

On aurait alors $Y \times X_1 = Z$ et $Y \times X_2 = Z$

Donc $Y \times X_1 - Y \times X_2 = 0$

$\Leftrightarrow Y(X_1 - X_2) = 0$ avec $(X_1 - X_2)$ et Y non nuls

Il s'agissait donc de savoir si on pouvait trouver deux nombres infinis non nuls dont le produit serait nul. On a vérifié qu'il y avait une infinité de possibilités.

Comme par exemple :

Y			1	3	2	3	2	3	8	6	1	1	2	2	1	3	1	3	4	7	6	5	6	2	5
K			3	7	3	9	5	3	4	4	3	6	3	6	4	4	5	5	1	9	5	4	4	3	2
			0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Donc, si on a X_1 tel que $Y \times X_1 = Z$

Y	...		1	3	2	3	2	3	8	6	1	1	2	2	1	3	1	3	4	7	6	5	6	2	5
X_1	...		7	5	3	1	9	2	8	4	6	5	5	8	6	3	4	9	1	3	6	5	7	4	3
Z	...		**5**	**9**	**7**	**0**	**9**	**7**	**7**	**5**	**4**	**4**	**7**	**8**	**4**	**5**	**4**	**5**	**8**	**9**	**8**	**4**	**3**	**7**	**5**

Alors, avec $X_2 = X_1 + K$, on a aussi $Y \times X_2 = Z$

Y			1	3	2	3	2	3	8	6	1	1	2	2	1	3	1	3	4	7	6	5	6	2	5
$X_1 + K$			1	2	7	1	4	6	2	9	0	1	9	5	0	8	0	4	3	3	2	0	1	7	5
Z			**5**	**9**	**7**	**0**	**9**	**7**	**7**	**5**	**4**	**4**	**7**	**8**	**4**	**5**	**4**	**5**	**8**	**9**	**8**	**4**	**3**	**7**	**5**

En résumé : si on veut « diviser » un nombre infini par un autre, on peut :

- **Soit trouver un résultat unique**
- **Soit ne pas trouver de résultat**
- **Soit en trouver plusieurs !**

VI Bonus : les racines carrées de 1

On a bien sûr

- $1^2 = 1$

- $(-1)^2 = 1$

  Et comme ….9999 + 1 = 0, on a …..9999 = « –1 »

  donc $.....9999^2 = 1$

- Il semble également possible de trouver une autre racine carrée de 1 dans les nombres infinis :

  $(.....39954784512519836425781249)^2 = 1$

  [remarque du correcteur : ce nombre ne semble pas périodique…]