Feuille d'exercices n^{o}4.
Equations différentielles.

Mise en route.

1. Montrer que les fonctions définies par $\dfrac{2\ln(x)+C}{x}$ (où C est une constante réelle quelconque) sont des solutions de l'équation différentielle
$$x^2\, y'(x) + x\, y(x) = 2.$$

Résolution d'équations d'ordre 1.

2. Résoudre les équations d'ordre 1 suivantes :
   (a) $y'(x) = -y(x)\,\sin(x)$
   (b) $y'(x)\,\tan(x) = y(x)$
   (c) $y'(x) = y(x) + e^{3x}$
   (d) $y'(x) = y(x) - 1 - e^{x}$
   (e) $y'(x) = 2\,x\,y(x) + x^3$

3. Résoudre l'équation différentielle à variables séparables $y'(t) = e^{-t}y(t)^2$.
   Indication : calculer une primitive de $\dfrac{y'(t)}{y(t)^2}$.

Résolution d'équations d'ordre 2.

4. Résoudre les équations d'ordre 2 suivantes :
   (a) $y''(x) - 5\,y'(x) + 6\,y(x) = 0$
   (b) $y''(x) - 9\,y(x) = 0$. Donner la solution telle que $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
   (c) $y''(x) + y'(x) + y(x) = 0$
   (d) $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$.
   (e) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x^2$. Donner la solution telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. *(chercher une solution particulière $y_p(x)$ du type polynôme)*
   (f) $y''(x) - 2y'(x) + 2 = xe^x$ (chercher une solution particulière sous la forme de $y_p(x) = (ax+b)e^x$.

Application.

5. Il est démontré expérimentalement que si la réaction chimique
$$N_2O_5 \to 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$$
se produit à 45 degrés, le taux de réaction du pentoxyde d'azote est proportionnel à sa concentration selon la formule
$$\frac{d[N_2O_5]}{dt} = -0,0005\,[N_2O_5]$$
Exprimer la concentration $[N_20_5]$ après T secondes sachant que la concentration initiale est C.

6. Suite à une marée noire, une algue est soumise à un polluant dont la concentration $P(t)$ dans l'eau varie au gré des marées, en se dissipant de plus en plus. On modelise cette concentration comme $P(t) = (C_o + a\sin\omega t)e^{-\mu t}$, où C_0 est la concentration moyenne (en mol/l), a l'amplitude de la variation quotidienne, et ω est la pulsation de la marée (en radians par heures), et μ caractérisant la vitesse de décroissance du polluant (en h^{-1}).

   La concentration en polluant à l'interieur $C(t)$ de l'algue satisfait l'équation differentielle suivante (conformément à la pression osmotique) : $C'(t) = \lambda(P(t) - C(t))$.

   Calculer la concentration a l'interieur de l'algue au cours du temps. On pourra commencer par le cas où l'influence des marées est négligeable ($a = 0$) est plus facile. Pour le cas général, on pourra chercher une primitive de $\int e^{(\lambda-\mu)t}\sin\omega t$ sous la forme $Ae^{(\lambda-\mu)t}\cos\omega t + Be^{(\lambda-\mu)t}\sin\omega t$, ou en faisant deux intégrations par parties.

Compléments.

7. Une population de bactéries varie au cours du temps. Pour modéliser que les ressources du milieu sont limitées, on prend un modèle tel que plus la population est nombreuse, plus sa vitesse de croissance est faible.
$$P'(t) = \lambda e^{-P(t)/P_c}$$
   avec $\lambda = 1000 bact/h$, $P_c = 10\,000 bact$. Sachant que la population initiale est de $2000 bact$, calculer la population de bactéries au cours du temps.

8. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $y''(x) - y'(x) + y(x) = x^2 + 6$
   (chercher une solution particulière $y_p(x)$ du type polynôme)
   (b) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = (1 + x)\,e^{-2x}$
   (chercher une solution particulière $y_p(x) = u_p(x)\,e^{-2x}$, écrire l'équation vérifiée par $u_p(x)$ et chercher $u_p(x)$ sous forme d'un polynôme)
   (c) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x + e^{-x}$
   (une solution particulière $y_p(x)$ est $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$ où $y_{p,1}(x)$ est solution particulière de $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x$ et $y_{p,2}(x)$ solution particulière de $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$)

9. Une membrane de cellule a une capacité C et une résistance R. L'équation qui connecte la charge q au potentiel transmembrane E est
$$E = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$
   Si $q = Q$ quand $t = 0$, montrer que pour toute valeur de t,
$$q = EC - (EC - Q)e^{-t/(RC)}$$

10. On tente de modéliser la manière dont une rumeur se répand en considérant que la vitesse de propagation $y'(t)$ est proportionnelle au produit de la fraction y de ceux qui sont au courant de la rumeur par la fraction de ceux qui, au contraire, ne sont pas au courant.
    (a) Ecrire une équation différentielle vérifiée par y.
    (b) En déduire une équation différentielle vérifiée par $z = \dfrac{1}{y}$.
    (c) Résoudre l'équation vérifiée par z et en déduire y.
    (d) Une petite ville compte 1000 habitants. A 8 heures du matin, 80 personnes ont entendu parler de la nouvelle du jour. A midi, la moitié de la ville est au courant. Quand 90% de la population saura-t-elle la nouvelle ?