

Feuille d'exercices n°3.
Primitives et intégration.

Calculer les primitives ou intégrales suivantes :

1. en développant

(a) $\int (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 dx$

(b) $\int_1^2 \frac{x^5 - 2x^3 + 3x - 1}{x^2} dx$

2. par intégration par parties

(a) $\int x^2 \ln(x) dx$

(b) $\int_0^3 x e^x dx$

(c) $\int \arctan(x) dx$

(d) $\int_0^{2\pi} x \sin(x) dx$

3. en reconnaissant $\int u'(x) f(u(x)) dx$:

(a) $\int \frac{x^5}{1+x^6} dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(x) dx$

(c) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

4. par changement de variable

(a) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ (poser $u = \sqrt{x+1}$)

(b) $\int \frac{1}{3x^2+2} dx$ (poser $u = \sqrt{\frac{3}{2}}x$)

(c) $\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx$ (poser $u = e^{2x}$)

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$ (poser $u = x^{1/6}$, puis faire un 2nd changement de variables $t = 1 + u$).

Applications.

5. Calculer l'intégrale suivante (souvent rencontrée dans des problèmes de statistiques) :

$$\int x \exp(x^2) dx$$

6. Une substance commence à entrer dans la circulation sanguine d'un chat au temps $t = 0$. On note $C(t)$ la concentration de cette substance au temps t . D'après un modèle théorique, la vitesse de variation $\dot{C}(t)$ de la concentration est donnée par la formule

$$\dot{C}(t) = A \exp(-\theta t) - B \exp(-\lambda t)$$

où A, B, θ, λ sont des constantes.

Calculer la valeur de la concentration $C(t)$ au temps t .

7. Une population d'animaux augmente à la vitesse de $200 + 50t$ (en individus/an, t étant en années). De combien la population a-t-elle augmenté entre la quatrième et la dixième année ?

8. Une population de bactéries d'initialement 700 unités croît à la vitesse de $452,7 \times e^{1,25t}$ bactéries par heure. Quel est l'effectif de cette population après trois heures ?

Compléments.

9. Calculer les primitives suivantes

(a) $\int (x^3 + \frac{1}{x^2})^4 dx$

(b) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

(c) $\int x^3 \ln(x) dx$

(d) $\int x^2 e^x dx$

10. Déterminer l'aire de l'ensemble des points du plan délimité par les courbes représentatives dans un repère orthonormé des fonctions f et g définies par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{4} \\ g(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 12 \end{cases}$$

11. La vitesse d'un objet en mouvement rectiligne est donnée à tout instant t par $v(t) = t^2 e^{-t}$ (en m/s). Quelle distance a-t-il parcouru entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = T$?

12. La loi de l'écoulement laminaire exprime la vitesse v du sang qui s'écoule dans un vaisseau sanguin cylindrique de rayon R et de longueur l à une distance r de l'axe central

$$v(r) = \frac{P}{4\nu l} (R^2 - r^2)$$

où P est la différence de pression entre les deux extrémités du vaisseau et ν est le coefficient de viscosité du sang. On souhaite calculer le débit ou flux (volume par unité de temps) du sang.

La surface d'un anneau de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + \Delta r$ est $2\pi r \Delta r$. Si la vitesse du sang était constante égale à v sur cet anneau (ce qui est quasiment le cas si Δr est petit) le débit sanguin à travers cet anneau serait $v \times 2\pi r \Delta r$. En découpant la section du cylindre en anneaux de plus en plus petits, on obtient ainsi le débit total F (appelé aussi flux sanguin dans le vaisseau) est égal à l'intégrale

$$F = \int_0^R v(r) \times 2\pi r dr.$$

Calculer la valeur du flux sanguin F (loi de Poiseuille).