Feuille d'exercices n^{o}2.
Dérivées partielles.

Calcul de dérivées partielles.

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+z^2}{1+y^2}$.
   Exprimer les dérivées partielles de f en tout point (x,y,z), puis lorsque $x=1, y=2, z=3$

2. Calculer les dérivées partielles premières et secondes de la fonction f définie par
   $$f(x,y) = \ln(x^2+y^2).$$
   Montrer que la quantité $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (appelée laplacien de f) est nulle.
   Calculer $\partial^2 f/\partial x \partial y$ et $\partial^2 f/\partial y \partial x$ et verifier qu'elles sont égales, conformément au théorème de Schwarz.

3. La température en un point (x,y) d'une fine plaque de métal est donnée par $T(x,y) = \dfrac{60}{1+x^2+y^2}$ où T est mesurée en ^oC et x et y en mètres.
   Déterminer la vitesse de variation de la température par rapport à la coordonnée x au point $(2,1)$.
   Meme question pour la vitesse par rapport à la coordonné y.

Calcul d'incertitudes.

4. Soit $f(x,y) = \arctan(x+y) - ye^{-x^2}$.
   (a) Calculer les dérivées partielles de f, et leurs valeurs en $x=0, y=1$.
   (b) Calculer $f(x,y)$ pour $x=0, y=1$. Si on a une incertitude de 0.01 sur x et de 0.02 sur y, quelle incertitude sur $f(x,y)$ en resulte-t-il ?

5. La température, la pression et le volume d'un gaz parfait sont liés par une relation du type
   $$P = k\frac{T}{V}$$
   où k est une constante positive.
   On réalise des mesures sur T et V. Si on a une incertitude relative de $0,3\%$ sur T et de $0,2\%$ sur V, calculer l'incertitude relative sur P qui en résulte.

6. Dans le modèle de Gompertz, une population P evolue au cours du temps t selon la formule
   $$P(t,K,P_0) = Ke^{\ln(\frac{P_0}{K})e^{-t/a}}$$
   avec K la capacite limite du milieu (en nombre d'individus), t le temps (en annees, par exemple), a etant une constante du modele (en années aussi), qu'on prendra égale $a = 10ans$.
   (a) Donner la valeur numérique de P lorsque $P_0 = 10^6$, $K = 10^7$, $t = 10ans$.
   (b) Calculer $P(0,K,P_0)$ et interpreter la valeur de P_0. En quelles unités s'exprime P_0 ?
   (c) Calculer, à P_0, K fixés, la limite de la population quand $t \to \infty$. Comment s'interprète K ?
   (d) Calculer la vitesse de variation instantanée de la population (par rapport au temps) en fonction de P_0, K, t, a. En quelles unités s'exprime-t-elle ? Donner sa valeur numérique lorsque $P_0 = 10^6$, $K = 10^7$, $t = 10ans$.
   (e) Calculer la vitesse de variation de la population par rapport a K. En quelle unités s'exprime-t-elle ? Donner sa valeur numérique lorsque $P_0 = 10^6$, $K = 10^7$, $t = 10ans$.
   (f) Calculer la vitesse de variation de la population par rapport a P_0. En quelle unités s'exprime-t-elle ? Donner sa valeur numérique lorsque $P_0 = 10^6$, $K = 10^7$, $t = 10ans$.
   (g) Supposons que dans la 1ere question, on ait une incertitude sur t de $0,1$ an, sur K de 5.10^5 individus, et sur P_0 de 10^4 individus. Quelle est l'incertitude sur P qui en resulte ?