Examen
Vendredi 25 juin, 8h
2 heures

Les documents, les portables et la calculatrice sont interdits.

Exercice 1

Des mesures expérimentales sur une plante permettent d'établir que sa taille T (en mètres) évolue en fonction du temps t (en années) selon la formule $T = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$. Soit f la fonction donnée par

$$f(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Déterminer les éventuelles asymptotes à la courbe de f.
4. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.
5. Etablir le tableau de variations de f.
6. Donner l'allure de la courbe de f dans une repère orthonormé. On dessinera notamment les éventuelles asymptotes et la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
7. D'après l'étude de f sur $[0, +\infty[$,
   (a) quelle est en centimètres, la taille de la plante au début de l'expérimentation ?
   (b) que peut-on dire de l'évolution de la taille de la plante au cours des années ?
   (c) quelle est en mètres la taille maximum que la plante peut atteindre ?

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(x) + 2y(x) = (x+1)e^{x}$$

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y'(x) + 2y(x) = 0$$
   Vérifier le résultat.
2. Calculer
$$\int (x+1)e^{3x}dx$$
3. A l'aide de la méthode de la variation de la constante, résoudre (E).

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$(E) \;\; y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 3\,x^2 + x + 2$$

1. Résoudre l'équation
$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$$
2. Dans cette question, on cherche une solution particulière $y_p(x)$ de (E) sous la forme $y_p(x) = x^2 + a\,x + b$ où a et b sont des paramètres réels.
   (a) Calculer $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$.
   (b) En déduire l'écriture de $y_p''(x) - 4\,y_p'(x) + 3\,y_p(x)$ sous la forme d'un polynôme de degré 2.
   (c) Déterminer les valeurs de a et b sachant que $y_p''(x) - 4\,y_p'(x) + 3\,y_p(x) = 3\,x^2 + x + 2$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Exercice 4

Une étude sur la pénétration du froid a démontré que la température au temps t (mesuré en jours) à une profondeur x (mesuré en pieds) pouvait être modélisée par la fonction

$$T(x,t) = 1 + e^{-x}\sin(w\,t - x)$$

où

$$w = \frac{2\pi}{365}$$

1. Montrer que $T(0,0) = T(0,365)$. Interpréter cette égalité.
2. Calculer $\dfrac{\partial T}{\partial x}(x,0)$. Donner une interprétation physique de cette quantité.
3. Calculer $\dfrac{\partial T}{\partial t}(0,t)$. Donner une interprétation physique de cette quantité.