Examen
Mercredi 11 mai, 8h
2 heures

Les documents, les portables et la calculatrice sont interdits.
Le sujet comporte 5 exercices indépendants.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (7 points)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3\,x + 3}{x - 1}$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Quel est le domaine de définition D de f ?
2. Etudier le sens de variation de f sur D et dresser le tableau de variations de f.
3. Etudier les limites de f aux bornes de D et compléter le tableau de variations de f.
4. Etudier les branches infinies de f. Préciser les droites asymptotes éventuelles.
5. Donner l'allure de C.

Exercice 2 (3 points)

La température d'un corps est donnée par la formule :

$$T = 30 + 70e^{-0{,}04t}$$

où T est exprimée en degré C et où t est le temps écoulé à partir du début de l'expérience exprimé en minutes ($t \in [0, +\infty[$) .

1. Tracer le graphe de T en fonction du temps t.
2. Quelle est la température initiale ?
3. Montrer que la température décroît au cours du temps.
4. Montrer que la température ne peut pas descendre en dessous d'un certain seuil . Quel est ce seuil ?

Tournez la page S.V.P.

$\boxed{\textbf{Exercice } 3}$ (4 points)

Le but de cet exercice est de résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x} = x^2 \sin(x^2)$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle "sans second membre" associée :

$$(E_0) \quad y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 0$$

   sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   Dans le résultat, on pensera à donner une expression simplifiée de $e^{-\ln(x)}$ pour $x > 0$.
2. A l'aide du changement de variable $t = x^2$, puis d'une intégration par parties, calculer une primitive $B(x)$ de la fonction $x^3 \sin(x^2)$ sur $]0, +\infty[$
3. A l'aide des résultats des questions précédentes, déterminer la solution générale de l'équation (E) par la méthode de la variation de la constante .

$\boxed{\textbf{Exercice } 4}$ (4 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y''(x) - 4\,y(x) = 12x^2 - 4x - 6$$

1. Donner la solution générale de l'équation "sans second membre" associée :

$$(E_0) \quad y''(x) - 4\,y(x) = 0$$

2. Trouver une solution particulière de l'équation (E). On pourra chercher cette solution sous la forme d'un polynôme de degré 2.
3. Déduire des deux questions précédentes la solution générale de (E).
4. Donner la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales : $y(0) = 6$, $y'(0) = 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice } 5}$ (2 points)

La température en un point P de coordonnées (x, y) est donnée par :

$$T(x, y) = 200e^{-x^2-3y^2}$$

où x et y sont mesurés en mètres dans un système de coordonnées rectangulaires d'origine O.

1. Calculer le taux d'accroissement de T dans les directions (Ox) et (Oy) au point (x, y).
2. Donner l'expression de l'erreur absolue ΔT sur la température T lorsqu'on effectue une erreur absolue Δx sur la mesure de x et une erreur absolue Δy sur la mesure de y.
   Application numérique : calculer un majorant de $|\Delta T|$ (incertitude absolue sur la température T) au point (2,1) sachant que $|\Delta x|$ et $|\Delta y|$ sont inférieurs à 10^{-2}.