

Devoir maison

Exercice 1, extrait de contrôle, 2007.

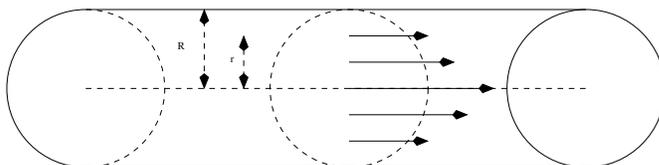
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2}.$$

1. Donner l'ensemble de définition D_f de f .
2. Calculer $f'(x)$.
3. Etudier les limites aux bornes de D_f .
4. Déterminer les éventuelles droites asymptotes et branches paraboliques.
5. Etablir le tableau de variations de f .
6. Donner l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé.

Exercice 2

Quand nous étudions la manière selon laquelle le sang s'écoule dans un vaisseau sanguin, que ce soit une veine ou une artère, nous pouvons assimiler le vaisseau sanguin à un tube cylindrique de rayon R et de longueur l , comme dessiné sur la figure ci-dessous :



La relation entre la vitesse du sang et la distance r entre le sang et l'axe est donnée par la loi de l'écoulement laminaire découverte par le physicien français Jean-Louis-Marie Poiseuille en 1840. Cette loi affirme que la vitesse $v(r)$ vérifie :

$$v(r) = \frac{P}{4\nu l} (R^2 - r^2) \text{ pour } r \in [0, R]$$

où ν est le coefficient de viscosité du sang, exprimé en Pascal \times seconde et P est la différence de pression entre les extrémités du tube, exprimée en Pascal. Les longueurs R , r et l sont exprimées en cm, la vitesse $v(r)$ est exprimée en cm/seconde. **Dans toute la suite de l'exercice**, on suppose que $P = 400$ Pascal; $\nu = 0,01$ Pascal \times seconde; $l = 1$ cm et $R = 0,01$ cm.

1. Vérifier que l'expression de la vitesse devient

$$v(r) = 1 - 10^4 \times r^2 \text{ avec } r \in [0, 10^{-2}]$$

2. Calculer le taux moyen de variation de la vitesse lorsque r passe d'un rayon $r = r_1$ vers un rayon plus extérieur $r = r_2$

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} := \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

3. Si nous faisons tendre r_2 vers r_1 , nous obtenons le taux instantané de la vitesse relativement à r , encore appelé *gradient de la vitesse* en r_1 :

$$(\nabla v)(r_1) := \lim_{r_2 \rightarrow r_1} \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

Calculer $(\nabla v)(r_1)$.

4. Calculer $v'(r)$ puis $v'(r_1)$. Que remarque-t-on ?
5. Où la vitesse est-elle la plus grande ? Où la vitesse varie-t-elle le plus ?