Feuille d'exercices 3. Algèbre linéaire (suite)

# I Tests de compréhension

Les tests sont à faire pour vérifier que vous comprenez le cours, les réponses se trouvent en fin de feuille de TD.

### Applications linéaires

**Test 1.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 & & -3x_3 \\ -x_1 & +3x_2 & -6x_3 \end{bmatrix}$$

(a) Calculer $f(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix})$.

(b) Ecrire $f(\vec{x})$ sous la forme $A.\vec{x}$ pour une certaine matrice $A$. Utiliser cette matrice pour calculer d'une autre manière $f(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix})$.

(c) Vérifier que les colonnes de la matrice de $f$ sont $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)$, où $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**Test 2.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. On suppose qu'il existe $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1, \quad f(\vec{v}_2) = (-3)\vec{v}_2$$

On rappelle que $f^n(\vec{v}) = f(f(...f(\vec{v})\dots))$.

(a) Déterminer $f^n(\vec{v}_1)$ et $f^n(\vec{v}_2)$.

(b) Soit $\vec{u} = 4\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2$. Déterminer $f^n(\vec{u})$.

### Diagonalisation

**Test 3.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

et soit $f = m_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $f(\vec{x}) = A.\vec{x}$.

(a) Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs propres de $A$. Quelles sont les valeurs propres correspondantes ?

(b) Determiner la matrice de $f$ dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

(c) Déterminer $P$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(d) Vérifier qu'on a bien $D = P^{-1}AP$ (on peut calculer $P^{-1}$ ou simplement vérifier que $P$ est inversible et que $PD = AP$).

---

# II Exercices

## Espaces vectoriels

**Exercice 1.** (a) Montrer en utilisant la définition que

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + 5z = 0\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer à nouveau que $V$ est un sous-espace en l'écrivant comme noyau d'une matrice.

(c) Donner une base de $V$ et en déduire sa dimension.

(d) Montrer que l'ensemble suivant n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ :

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 3\}$$

---

**Exercice 2.** Quelle est la dimension de l'espace $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille $n \times p$ ? Donner une base.

---

**Exercice 3.** Pour chacun des ensembles suivants, dire s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel. Si c'est le cas, déterminer une base et sa dimension :

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0, 2x - y + 4z = 0\}$$
$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y = 0\}$$
$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$$

---

**Exercice 4.** Pour chacune des matrices $A$ suivantes, déterminer une base de l'image de $A$, et un système d'équations cartésiennes de l'image de $A$.

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

---

**Exercice 5.** Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants, et un système d'équations cartésiennes (on pourra utiliser l'exercice 4) :

$$F_1 = \operatorname{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \quad F_2 = \operatorname{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix})$$

---

**Exercice 6.** Soient $V_1$ et $V_2$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par les sytèmes d'équations cartésiennes suivants :

$$V_1 : \begin{cases} x & +4y & +z & -2w & = & 0 \\ -x & -4y & +z & -4w & = & 0 \end{cases} \quad V_2 : \begin{cases} & & z & -3w & = & 0 \\ x & +4y & & +w & = & 0 \end{cases}$$

Donner une représentation cartésienne de $V_1 \cap V_2$.
Déterminer une base de $V_1 \cap V_2$ et sa dimension.

---

**Exercice 7** (Plus difficile)**.** Soit $V_1 = \operatorname{Vect}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$ et $V_2 = \operatorname{Vect}(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix})$.

Determiner une base de $V_1 \cap V_2$ et sa dimension.
*Indication :* on pourra commencer par trouver un systeme d'équations cartésiennes de $V_1$ et $V_2$.

---

**Exercice 8.** (a) Quels sont les sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ?

(b) Quels sont les sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$ ?

---

## Applications linéaires

**Exercice 9.** Soient les application suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{(a) } f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} z \\ x+2y \\ x \end{bmatrix} \qquad \text{(b) } g(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+y \\ y+2z \\ 2x+3 \end{bmatrix} \qquad \text{(c) } h(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y \\ y+z \\ xz \end{bmatrix}$$

(a) Montrer que $f$ est linéaire

(b) Montrer que $g$ et $h$ ne sont pas linéaires.

---

**Exercice 10.** Soit $A$ une matrice $3 \times 4$ qui vérifie

$$A.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A.\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Trouver un vecteur $\vec{x}$ tel que $A.\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

---

### Applications linéaires en géométrie

**Exercice 11.** Déterminer la matrice de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ obtenue en faisant une rotation d'angle $\pi/4$ autour de l'origine, puis en effectuant une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

---

**Exercice 12.** On note par $r_\theta$ la rotation du plan autour de l'origine par un angle $\theta$ dans le sens positif. Expliquer pourquoi

$$r_\alpha \circ r_\beta = r_{\alpha+\beta}.$$

En calculant les matrices de rotations correspondantes, retrouver les formules trigonométriques pour $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$.

---

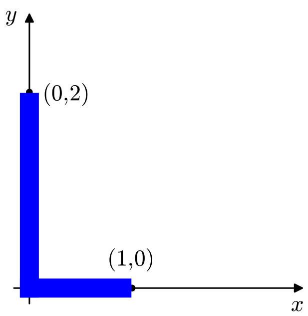
**Exercice 13.**

(a) Pour chacune des matrices ci-dessous, on considère l'application linéaire associée $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dessiner l'effet de $f$ sur la lettre L de la figure ci contre, puis donner une description géométrique de $f$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Pour $A_1$, $A_4$ et $A_5$, dire si l'application correspondant est inversible et, le cas échéant, déterminer la matrice de l'application inverse et interprétez-la géométriquement.




---

**Exercice 14.** Soit $M$ la matrice d'une rotation du plan d'angle $2\pi/3$. Sans calculer $M$, quelle est la matrice $M^3$ ? Déterminer la matrice $M$ et vérifier votre réponse.

---

**Exercice 15.** Soit $f$ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que l'image d'une droite qui passe par l'origine est soit une droite, soit $\{0\}$

(b) Que peut-il se passer pour une droite ne passant pas par l'origine ?

(c) A l'aide de $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$, décrivez géométriquement l'image du carré unité (on pourra supposer que ces 2 vecteurs ne sont pas colinéaires).

---

**Exercice 16** (Plus difficile)**.** (a) Construire une matrice dont l'image contient $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ et dont le noyau contient $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, ou sinon démontrer qu'une telle matrice n'existe pas.

(b) Même question pour une matrice dont l'image contient $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ et le noyau contient $\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$.

---

**Exercice 17.** Soient $M_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$. Soit $E$ l'espace vectoriel des matrices $2 \times 2$. Soit $f : E \to E$ définie par $f(A) = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \times A$.

Déterminer la matrice de $f$ dans la base $(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

---

**Changement de base**

**Exercice 18.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = \frac{3}{2}x$. Soient $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$.

(a) Déterminer $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$ et determiner la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

(b) Déterminer la matrice de passage $P$ entre la base canonique et la base $\mathcal{B}$, et son inverse.

(c) En déduire la matrice de $f$ dans la base canonique.

---

## Déterminant

**Exercice 19.** Soient

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\-3 & 1 & 4\\-1 & -3 & 8\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\1 & 1 & -1\\1 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\-2 & 2 & 2\\4 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1 & 2\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

(a) Utiliser la règle de Sarrus pour calculer le déterminant des matrices $A$ et $B$.

(b) Calculer le déterminant de $C$ en développant suivant la troisième ligne.

(c) Calculer le déterminant de $D$ en développement suivant la deuxième colonne.

(d) Calculer le déterminant de $E$ en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes.

---

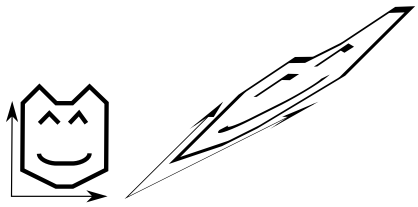
**Exercice 20.** (a) Déterminer (sans calcul, ou presque) le déterminant des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\0 & 0 & 0 & 0\\3 & -1 & 2 & -3\\7 & -3 & 5 & -1\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}230 & 728 & 230 & 432\\1301 & 315 & 1301 & 539\\5\pi & 52 & 5\pi & 7\sqrt{2}\\-22 & 45 & -22 & 18\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}4 & -1 & 2 & 7\\0 & 2 & \pi & 35\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

(b) Déterminer le déterminant des matrices $BC$, $C^2$, $C^{-1}$, $2C$.

---

**Exercice 21.** La figure de gauche ci-contre mesure 3cm$^2$. Combien mesure son image par la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (à droite) ?



---

**Exercice 22.** Pour quelles valeurs de $\lambda$ les matrices suivantes sont elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

## Diagonalisation

**Exercice 23.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 10 \\ -15 & 14 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont des vecteurs propres de $A$.

(b) Trouver une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ t.q. $D = P^{-1}AP$.

(c) Déterminer explicitement $P^{-1}$ et vérifier qu'on a bien $D = P^{-1}AP$. Vérifier votre résultat.

---

**Exercice 24.** Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

autrement dit :

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.

(b) Déterminer les valeurs propres de $A$.

(c) Déterminer (une famille libre de) deux vecteurs propres de $A$ (autrement dit, une base de vecteurs propres pour $\mathbb{R}^2$).

(d) Trouver une matrice inversible $P$ et une matrice diagonale $D$ tels que $D = P^{-1}AP$.

---

**Exercice 25.** Diagonaliser la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

**Exercice 26.** Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de l'exercice 25.

En utilisant la diagonalisation trouvée dans cet exercice, exprimer $A^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

---

**Exercice 27.** Diagonaliser, si possible, les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

---

**Applications**

**Exercice 28.** Soit $A_2$ la matrice de l'exercice 41 où on a trouvé des matrices $P$ et $D$ telles que $D = P^{-1}A_2P$.

(a) Expliquer pourquoi on a $A_2 = PDP^{-1}$.

(b) Expliquer pourquoi on a alors $A_2^n = PD^nP^{-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Calculer $A_2^n$ (en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$). Vérifier votre formule pour $n = 4$.

---

**Exercice 29.** Une multinationale a 4 milliards de dollars aux Etats-Unis, en Europe et en Chine. Au début, 2 milliards sont aux Etats-Unis, et 2 milliards en Europe.

Chaque année, la moitié des fonds américains restent en amérique, et l'autre moitié est répartie a parts égales entre Europe et Chine. Simultanément, la moitié des fonds chinois et européens reste sur place et l'autre moitié part aux États-Unis.

Quelle sera la distribution de ces fonds à la fin des temps ? Pour répondre à cette question, on pourra

(a) Ecrire la répartition des fonds l'année $n+1$ en fonction de l'année $n$ sous la forme

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = A. \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}$$

pour une certaine matrice $A$ à déterminer.

(b) Diagonaliser $A$ : déterminer les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et une base de vecteurs propres $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

(c) Determiner $A^n\vec{v}_i$ pour chacun des vecteur $\vec{v}_i$, et determiner sa limite quand $n \to \infty$.

(d) Décomposer le vecteur représentant la répartition des fons initiale dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

(e) En déduire la réponse à la question initiale.

---

**Exercice 30.** Soit $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite récurrente définie par la relation

$$u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}, \qquad n \geq 1$$

et la condition initiale $u_0 = 1$, $u_1 = 1$.

(a) Pour se familiariser avec cette suite, calculer $u_2, u_3, u_4$.

(b) On pose

$$\vec{x}_n = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}, \qquad n \geq 0.$$

Montrer qu'on a

$$\vec{x}_{n+1} = A\,\vec{x}_n, \qquad n \geq 0,$$

où $A$ est la matrice de l'exercice 26.

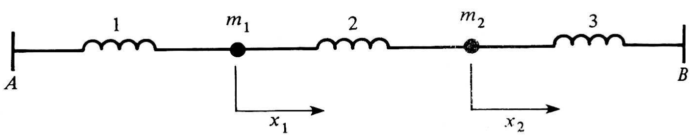
(c) Expliquer pourquoi on a $\vec{x}_n = A^n\,\vec{x}_0$, $n \geq 0$.

(d) Montrer, en utilisant les résultats de l'exercice 26 que $u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}$, $n \geq 0$.

(e) Utiliser cette formule pour calculer $u_4$ et comparer avec (a).

---

**Exercice 31.** On considère 2 masses $m_1, m_2$ reliées entre elles et à deux extrémités fixes par trois ressorts identiques de raideur $k$ comme sur la figure ci-dessous.




On note $x_1, x_2$ la position des masses $x_1, x_2$ de sorte que lorsque $x_1 = x_2 = 0$, les 3 ressorts sont détendus. A l'instant initial, les deux masses sont à leur position initiales $x_1(0) = x_2(0) = 0$, et que les deux vitesses initiales sont $x_1'(0) = 2$, $x_2'(0) = 0$ (la 2ème masse est a l'arrêt). On suppose que les seules forces s'exerçant sur les masses sont celles exercées par les ressorts.

(a) Montrer que $x_1, x_2$ vérifient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} m_1 x_1'' & = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m_2 x_1'' & = -k(x_2 - x_1) - kx_2 \end{cases}$$

(b) Ecrire ce système sous la forme $X'' = A.X$ avec $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ pour une matrice $A$ à déterminer.

On prendra $k = 1$ et $m_1 = m_2 = 1$ dans des unités arbitraires.

(c) Déterminer les valeurs propres de $A$ et déterminer une base de vecteurs propres correspondant $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

(d) Si on note $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = y_1\vec{v}_1 + y_2\vec{v}_2$, déterminer le système d'équations différentielles satisfait par $y_1, y_2$.

(e) Déterminer la solution générale $y_1(t)$, $y_2(t)$ de ce système d'équations différentielles, puis déterminer la solution générale $x_1(t), x_2(t)$ du système initiale

(f) Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale donnée.

---

# III Exercices supplémentaires

**Exercice 32.** Pour chanun des ensembles suivants, dire s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel. Si c'est le cas, déterminer une base et sa dimension :

$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$ $\qquad$ $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2\}$

$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3y + 2z = 0, 2x - 5y + 2z = 0\}$ $\qquad$ $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 5y - z = 0\}$

---

**Exercice 33.** Montrer que l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}^n$ et déterminer une base et sa dimension :

$$\begin{cases} x & -y & +2z & -2w & = & 0 \\ & y & -3z & -2w & = & 0 \\ -x & +2y & -4z & +w & = & 0 \\ & y & -4z & -3w & = & 0 \end{cases}.$$

---

**Exercice 34.** Soient $f$ la symétrie du plan par rapport à la droite $Ox$ et $g$ celle par rapport à la droite $y = x$.

Déterminer les matrices de $f$, $g$, et $g \circ f$ et montrer que $g \circ f$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Meme question avec $f \circ g$.

---

**Exercice 35.** Pour chacune des matrices suivantes, déterminer un systeme d'equations cartésiennes de l'image de $A$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

---

**Exercice 36.** Dire si les applications du plan suivantes sont linéaires :

(a) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x - y \\ y + z \\ x + 2z \end{bmatrix}$ $\qquad$ (b) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y + z \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ (c) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Dire pour chacune de ces applications si elle est linéaire ou non.

---

**Exercice 37.** Soient $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Soit $E$ l'espace vectoriel des matrices $2 \times 2$. Soit $f : E \to E$ qui a une matrice $A \in E$ associe $A. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice de $f$ dans la base $(M_1, M_2, M_3, M_4)$.

---

**Changement de base**

**Exercice 38.** Soit $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, et $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$

(b) Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que

$$g(\vec{v}_1) = 2\vec{v}_1 + v_2 \quad \text{et} \quad g(\vec{v}_2) = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2.$$

Déterminer la matrice de $g$ dans la base canonique.

---

**Déterminants**

**Exercice 39.** Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) en utilisant la règle de Sarrus ; (b) en développant suivant la première ligne ; (c) en développant suivant la deuxième colonne (d) en la transformant sous forme triangulaire.

---

**Exercice 40.** (a) Calculer le déterminant des matrices suivantes en utilisant une méthode de votre choix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer le déterminant de $AB$, $C^2$,

---

**Diagonalisation**

**Exercice 41.** Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

---

# IV Réponse aux tests et exercices supplémentaires

## Réponses aux tests

---

**Réponse au test 1.** Pour le (d) j'ai donné comme critère : (i) $f(a\vec{u}) = af(\vec{u})$, (ii) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u})+f(\vec{v})$ mais aussi $f(a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v})$.

---

**Réponse au test 2.** $f^n(\vec{v}_1) = 2^n\vec{v}_1$ $f^n(\vec{v}_2) = (-3)^n\vec{v}_2$ (se démontre par récurrence puisque $f^{n+1}(\vec{v}) = f(f^n(\vec{v}))$). Puisque $f^n$ est linéaire,

$$f^n(\vec{u}) = f^n(4\vec{v}_1 - 5\vec{v}_2) = 4f^n(\vec{v}_1) - 5f^n(\vec{v}_2) = 4 \times 2^n\vec{v}_1 - 5 \times (-3)^n\vec{v}_2.$$

---

**Réponse au test 3.**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## Réponses aux exercices supplémentaires

---

**Réponse à l'exercice 32.** (a) $V_1$ : Oui. Base : $(-2,1,0)$, $(1,0,1)$. $V_2$ : non. $V_3$ : Oui. Base : $(4,2,1)$. $V_4$ : Non.

---

**Réponse à l'exercice 33.** On trouve comme base : $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, c'est un espace de dimension 1.

---

**Réponse à l'exercice 34.** $M_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_{g\circ f} = M_g \circ M_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On reconnait la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$. $M_{f\circ g} = M_f M_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

---

**Réponse à l'exercice 35.** Les 2 premieres colonnes de $A_1$ forment une base de $\mathrm{Im}A_1$, correspondant aux 2 variables pivot. On a un systeme de 2 equations cartesiennes pour $\mathrm{Im}A_1$ : $-2a+b+c=0$, $-a+3b+d=0$.

Les colonnes 1 et 3 de $A_2$ forment une base de $\mathrm{Im}A_2$, correspondant aux 2 variables pivot. On a un systeme de 2 equations cartesiennes pour $\mathrm{Im}A_2$ : $-4a+3b+2c=0$, $-6a+5b+4d=0$.

---

**Réponse à l'exercice 36.** (a) Oui. (b) Non. (c) Non.

---

**Réponse à l'exercice 37.** On trouve $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

---

**Réponse à l'exercice 38.** (a) La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 36 & 24 \\ -55 & -37 \end{pmatrix}$

(b) La matrice de $f$ dans la base $\mathcal{B}$ est $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Sa matrice dans la base canonique est $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & -7 \\ 19 & 14 \end{pmatrix}$

---

**Réponse à l'exercice 39.** $\det A = -5$.

---

**Réponse à l'exercice 40.** $\det A = 1$ ; $\det B = 42$ ; $\det C = 3$ ; $\det D = 15$.

---

**Réponse à l'exercice 41.**

- $A_1$ : $\quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$
- $A_2$ : $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$