Feuille d'exercices 2. Algèbre linéaire

I Tests de compréhension

Les tests sont à faire pour vérifier que vous comprenez le cours, les réponses se trouvent en fin de feuille de TD.

Test 1. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x-y+3z=2$. On a aussi une représentation paramétrique

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} | t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Est-ce que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$? Quelle est la représentation (cartésienne ou paramétrique) la plus pratique pour répondre à la question ?

Trouver un point de $\mathcal{P}$. Trouver 2 autres points de $\mathcal{P}$ de sorte que ces 3 points soient non alignés. Quelle est la représentation (cartésienne ou paramétrique) la plus pratique pour répondre à ces questions ?

Test 2. Calculer la combinaison lineaire $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Ecrire le vecteur $\begin{bmatrix} 1 - t_1 - 2t_2 \\ 2 - t_1 - 3t_2 \\ 3 - t_1 - 4t_2 \end{bmatrix}$ sous la forme $\vec{u} + t_1\vec{v} + \vec{t_2}\vec{w}$.

Test 3. Les matrices suivantes sont elles échelonnées ?

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Test 4. Les systemes suivants sont ils échelonnées ?

$$(a) \begin{cases} x & +y & +2z & =1 \\ & & 0 & =1 \\ & & 0 & =2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x & +y & +2z & +3t & =1 \\ & y & & & =1 \\ & & & 0 & =2 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x & +y & +2z & +3t & =1 \\ & & z & +t & =1 \\ & y & & & =2 \end{cases}$$

Test 5. Ecrire le vecteur $\begin{bmatrix} x+2y+3z \\ x-y-z \\ 2x-3y+z \end{bmatrix}$ sous la forme $A.\vec{v}$ pour une certaine matrice A et $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

II Exercices

Droites, plans, et systèmes linéaires

Exercice 1. (a) Ecrire sous forme paramétrique le plan de l'espace donné par l'équation

$$\mathcal{P} : \qquad 2x - 3y + 4z = 6$$

En déduire un point et une paire de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

(b) Même questions pour le plan

$$\mathcal{P}' : \qquad 2x - 3y + 4z = 0$$

Comparer avec la question précédente.

Exercice 2. Considerons le plan

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} | t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Est-ce que $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$?

(b) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

(c) Est-ce que $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$? (utiliser la question précédente)

Exercice 3. (a) Déterminer l'intersection des deux plans suivants :

$$\begin{array}{rrrrcr} \mathcal{P}_1 : & x & +2y & -3z & = & 0 \\ \mathcal{P}_2 : & 2x & -y & +4z & = & 0 \end{array}$$

(b) Déterminer l'intersection des trois plans suivants :

$$\begin{array}{rrrrcr} \mathcal{P}_1 : & x & -y & +3z & = & 1 \\ \mathcal{P}_2 : & 2x & +y & -z & = & 3 \\ \mathcal{P}_2 : & x & -4y & +10z & = & 1 \end{array}$$

(c) Déterminer l'intersection des trois plans suivants :

$$\begin{array}{rrrrcr} \mathcal{P}_1 : & 2x & -2y & -z & = & 2 \\ \mathcal{P}_2 : & x & +2y & +z & = & 1 \\ \mathcal{P}_2 : & x & +8y & +4z & = & 1 \end{array}$$

Si l'intersection n'est pas vide, donner une description géométrique de l'intersection.

Systèmes linéaires

Exercice 4. (a) Déterminer (sous forme paramétrique) l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & -4y & -z & +w & = & 3 \\ 2x & -8y & +z & -4w & = & 9 \\ -x & +4y & -2z & +5w & = & -6 \end{array} \right.$$

(b) Quel est l'ensemble des solutions du système homogène correspondant ?

(c) Décrire l'ensemble des solutions du système initial comme somme d'une solution particulière et de l'ensemble des solutions du système homogène.

(d) A quelle condition sur a, b, c le système de second membre $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ a-t-il une solution ?

Exercice 5. Pour les systèmes suivant, déterminer le nombre de solutions. Determiner le nombre de variables libres du système homogène associé.

(a) $\left\{ \begin{array}{rrcr} 2x & +y & = & 7 \\ 3x & +2y & = & 12 \\ 4x & -3y & = & 2 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{rrrcr} x & +y & -z & = & -2 \\ 2x & -y & +z & = & 5 \\ x & +4y & -4z & = & -11 \end{array} \right.$

Exercice 6. A quelle condition sur le second membre les systèmes suivants ont-ils (au moins) une solution ?

(a) $\left\{ \begin{array}{rrrrl} x & 2y & -z & +t & = a \\ 2x & +7y & +4z & +2t & = b \\ -x & +4y & 13z & -t & = c \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{rrl} x & +3y & = a \\ 3x & -y & = b \\ 2x & +2y & = c \\ x & -4y & = d \end{array} \right.$ (c) $\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & +z & = a \\ x & +y & & = b \\ -x & +y & +2z & = c \end{array} \right.$

Exercice 7. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & +2y & & +2w & = & 0 \\ 2x & +4y & +z & +2w & = & 2 \\ 3x & +5y & -z & +6w & = & -1 \\ 2x & & -7z & +10w & = & -10 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rrrrrr} 2x & +4y & +z & +2w & = & 4 \\ 2x & +6y & +z & +w & = & 0 \\ x & +3y & +z & +w & = & 1 \\ x & +2y & +z & +2w & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & +2y & & +2w & = & 6 \\ 3x & +5y & -z & +6w & = & 17 \\ 2x & +4y & +z & +2w & = & 12 \\ 2x & & -7z & +10w & = & 7 \end{array} \right.$$

Système à paramètre

Exercice 8. Résoudre en fonction de $a \in \mathbb{R}$ le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} x & +2y & +z & = & 1 \\ 2x & +(a+4)y & +(a+2)z & = & 4 \\ -x & +(a-2)y & +z & = & a-1 \end{array} \right.$$

Bases de $\mathbb{R}^n$

Exercice 9. Soient

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Montrer que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ est une base du plan $\mathbb{R}^2$ et déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ par rapport à cette base.

Exercice 10. Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire s'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$. Si c'est le cas, déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dans cette base.

$$\text{(a)} \quad \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Calcul matriciel

Exercice 11. Soient

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Détermiuner, si possible, $2A$, $A - B$, $A + C$.

Exercice 12. Calculer le produit des matrices suivantes

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer, si possible, AB, AC, CA, A^2, C^2.

Matrice inverse

Exercice 14. Soient A, B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que B est la matrice inverse de A.

Exercice 15. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer si ces matrices sont inversibles, et si c'est le cas, calculer leur inverse.

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

(b) Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Résoudre $A\vec{x} = \vec{v}$, avec $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Exercice 17. On considère le système

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & -1 \\ x & +2y & -z & = & 2 \\ 2x & +3y & -2z & = & 3 \end{cases}$$

(a) Résoudre le système en utilisant A^{-1} (voir exercice 14)

(b) Résoudre le système homogène correspondant :

$$\begin{cases} x & +y & -2z & = & 0 \\ x & +2y & -z & = & 0 \\ 2x & +3y & -2z & = & 0 \end{cases}$$

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

(b) Résoudre le système $A\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Résoudre $A\vec{x} = \vec{v}$, où $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) Soient $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les vecteurs colonnes de A. En déduire les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 19. On connait l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ valable pour tous réels a, b. Supposons maintenant que A, B sont des matrices de taille $n \times n$.

Trouver A, B tq $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Quelle est la bonne formule pour $(A+B)^2$? A quelle condition sur A, B la formule $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ est-elle valide ?

Exercice 20. Soit A, B deux matrices $n \times n$. Supposons que AB soit inversible. En déduire que A et B sont inversibles.

Puissances d'une matrice (Optionnel)

Exercice 21. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Vérifier que $M^3 = M$, mais que $M^2 \neq I_3$ (où I_3 est la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$).

(b) La matrice M est-elle inversible ?

(c) Déterminer M^n pour tout $n \geq 1$.

III Exercices supplémentaires

Vous trouverez les réponses à ces exercices en fin de feuille de TD.

Exercice 22. Considerons le plan

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Est-ce que $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$?

(b) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

(c) Est-ce que $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{P}$? (utiliser la question précédente)

Exercice 23. Pour chacun des systèmes suivants, déterminer le nombre de solutions :

(a) $\left\{ \begin{array}{rrcr} x & +2y & = & 10 \\ 2x & -2y & = & -4 \\ 3x & +5y & = & 26 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x & -y & +z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \\ x & +4y & -4z & = & 0 \end{array} \right.$

Exercice 24. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

(a) $\left\{ \begin{array}{rrrrcr} x & +2y & +z & +2w & = & 0 \\ x & +2y & +2z & +3w & = & 0 \\ 2x & & -2z & +4w & = & 0 \\ x & +3y & +z & +3w & = & 0 \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{rrrrcr} 2x & +2y & +5z & +5w & = & 0 \\ 2x & +2y & +4z & +6w & = & 0 \\ x & +y & +2z & +3w & = & 0 \\ -x & -y & -z & -4w & = & 0 \end{array} \right.$

Exercice 25. A quelle condition sur le second membre les systèmes suivants ont-ils (au moins) une solution ?

(a) $\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & -3z & = a \\ 3x & -2y & -z & = b \\ x & -2y & -2z & = c \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{lrrl} 2x & +y & & = a \\ x & & +z & = b \\ 4x & +y & +2z & = c \end{array} \right.$ (c) $\left\{ \begin{array}{rrl} 2x & +y & = a \\ x & -3y & = b \\ -x & +4y & = c \\ x & -y & = d \end{array} \right.$

Exercice 26. Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, dire s'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

Exercice 27. Soient

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(a) Montrer que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ par rapport à cette base.

Exercice 28. Soient

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Montrer que $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ par rapport à cette base.

Exercice 29. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer, si cela est possible, AB, BA, A^2, B^2.

Exercice 30. Calculer les produits AB, BA, A^2, B^2 des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 31. Soient

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & +6 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer si ces matrices sont inversibles et déterminer leur inverse le cas échéant.

Exercice 32. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calculer M^2, M^3, et M^4 ; comparer M^4 et M.

(b) En deduire que la matrice M n'est pas inversible.

(c) Déterminer M^n pour tout $n \geq 1$.

IV Réponse aux tests et exercices supplémentaires

Réponse au test 1. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \notin \mathcal{P}$ puisqu'il ne satisfait pas l'equation $2x - y + 3z = 2$. C'est la resprésentation cartésienne qui est utile.

La représentation paramétrique permet de construire facilement des points de $\mathcal{P}$. Par exemple, le point $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est dans $\mathcal{P}$ (correspondant à $t_1 = t_2 = 0$). Si on fait $t_1 = 1, t_2 = 0$, on obtient un point $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; et on obtient $C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en faisant $t_1 = 0, t_2 = 1$. Ces 3 points ne sont pas alignés puisque $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont les 2 vecteurs $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Réponse au test 2. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 4t_1 + 7t_2 \\ 2 + 5t_1 + 8t_2 \\ 3 + 6t_1 + 9t_2 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1 - t_1 - 2t_2 \\ 2 - t_1 - 3t_2 \\ 3 - t_1 - 4t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Réponse au test 3. (a) Non : la ligne de zeros n'est pas en bas. (b) Non, il y a un coef non nul sous le pivot de la 2e ligne. (c)(d) oui.

Réponse au test 4. (a),(b) oui. (c) non : le pivot de la 3eme ligne est a gauche du pivot de la 2eme ligne.

Réponse au test 5. On prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $A.\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ x - y - z \\ 2x - 3y + z \end{bmatrix}$.

Réponse à l'exercice 22. (a) Il s'agit de savoir si le système

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d'inconnues t_1, t_2 a une solution. Il n'en a pas donc $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \notin \mathcal{P}$

(b) On trouve que le système

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a des solutions ssi $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$. $\mathcal{P}$ a donc pour equation cartesienne $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$.

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est solution de $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$ donc appartient à $\mathcal{P}$.

Réponse à l'exercice 23. (a) une unique solution (b) Une infinité de solutions (1 variable libre)

Réponse à l'exercice 24. (a) $Sol = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ (b) $Sol = \{ s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \}$.

Réponse à l'exercice 25. (a) Le système a toujours une (unique) solution.

(b) Le système a une solution si et seulement si $-a - 2b + c = 0$

(c) Le système a une solution si et seulement si $-a + 9b + 7c = 0$ et $-2a - 3b + 7d = 0$ (il y a d'autres écritures possible du résultat)

Réponse à l'exercice 26. 2 méthodes possibles : on peut échelonner la matrice et voir s'il y a des variables libres, ou calculer le déterminant. (a) Non. (b) Oui.

Réponse à l'exercice 27. (a) Lorsqu'on échelonne le système

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

il n'y a pas de variable libre, donc c'est une base.

(b) En resolvant ce système on trouve $\vec{w} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, donc les coordonnées cherchées sont $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Réponse à l'exercice 28. On trouve $\begin{bmatrix} 14 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$ pour les coordonnées de $\vec{w}$.

Réponse à l'exercice 29. $BA = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad B^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$

Réponse à l'exercice 30.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Réponse à l'exercice 31. $A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. A_2 n'est pas inversible. $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

A_4 n'est pas inversible.

Réponse à l'exercice 32. (a) On trouve

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2M$$

(b) Si la matrice était inversible on pourrait déduire de $M^4 = 2M$ que $M^{-1}M^4 = 2M^{-1}M \iff M^3 = 2I_4$, (où I_4 est la matrice identité de $M_4(\mathbb{R})$), ce qui n'est pas le cas. Donc M n'est pas inversible.

(c) $M^5 = M^4M = 2MM = 2M^2$, $M^6 = M^4M^2 = 2M^3$, $M^7 = 2M^4 = 2^2M$. Plus generalement, comme $M^{4k} = (M^4)^k = 2^kI_4$, on ecrit $n = 4k + r$ avec $r = 0, 1, 2, 3$ (c'est la division euclidienne de n par 4, de reste r), et on obtient $M^n = M^{4k+r} = M^{4k}M^r = 2^kM^r$ et M^r est l'une des matrices I_4, M, M^2, M^3 selon la valeur de r.

V Formalisation de l'algorithme du pivot

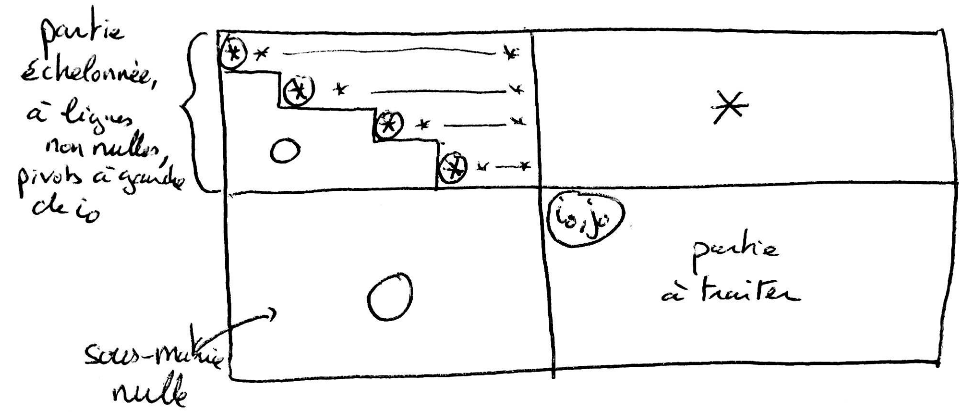
Algorithme 1 : Elimination par la méthode du pivot de Gauss

Entrée : une matrice $A = (a_{i,j})_{i\leq n, j\leq p}$
Sortie : une matrice échelonnée

Initialisation : $i_0 = 1, j_0 = 1$

Tant que $i_0 < n$, $j_0 \leq p$, **faire:**
- **if** a_{i_0,j_0} *et tous les coefs en dessous sont nuls :* **then**
  - incrementer i_0, recommencer la boucle
- **else**
  - Si necessaire, echanger L_{i_0} avec une ligne en dessous pour avoir $a_{i_0,j_0} \neq 0$
  - Effectuer des operations sur les lignes du type $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_{i_0}$ pour $i > i_0$ pour annuler les coefficients sous a_{i_0,j_0}
  - incrementer i_0 et j_0 et recommencer la boucle.

Renvoyer A



Invariant de boucle