

Formulaire de développements limités en 0

Développements limités classiques en 0, à connaître par cœur. (Chaque fonction $\epsilon(x)$ vérifie $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.)

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \epsilon(x) \\
 \sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x) \\
 \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n} \epsilon(x) \\
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x) &= \sum_{k=0}^n x^k + x^n \epsilon(x) \\
 \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \pm \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + x^n \epsilon(x) \\
 \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + x^n \epsilon(x) \\
 (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + x^n \epsilon(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + x^n \epsilon(x)
 \end{aligned}$$

Rappel : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, et $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}$.

Quelques exemples

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \epsilon(x) & \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + x^5 \epsilon(x) \\
 \sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + x^9 \epsilon(x) & \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + x^8 \epsilon(x) \\
 \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^5 \epsilon(x) & \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^5 \epsilon(x)
 \end{aligned}$$

Développements limités classiques qui ne sont pas à connaître par cœur (mais qu'il faut savoir retrouver)

	<i>Méthode</i>
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + x^4 \epsilon(x)$	$\alpha = \frac{1}{2}$
$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + x^4 \epsilon(x)$	$\alpha = \frac{1}{3}$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \epsilon(x)$	$\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + x^9 \epsilon(x)$	$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

Formules de Taylor-Young (à connaître) :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \epsilon(x), & \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) &= 0. \\
 f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + h^n \epsilon(h), & \lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) &= 0.
 \end{aligned}$$