
Contrôle Continu

Les documents, ainsi que les calculatrices et dispositifs électroniques, sont interdits.

Durée : **une heure**

Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour avoir une bonne note : prenez votre temps et soyez soigneux dans vos calculs et dans vos argumentations.

Exercice 1. (Questions de cours)

- (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 4 de $\sin(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- (b) Rappeler le développement limité à l'ordre 4 de $\exp(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- (c) Rappeler le développement limité à l'ordre 4 de $1/(1+x)$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- (d) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\sqrt{1+x}$ lorsque $x \rightarrow 0$.
- (e) Donner le développement limité à l'ordre 3 de $(1+x)^{1/4}$ lorsque $x \rightarrow 0$.

Exercice 2. (Question de cours, mais le développement est en $x = 1$)

Donner le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$ lorsque $x \rightarrow 1$.

Exercice 3. (Un développement limité)

Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\exp(\cos(x))$ lorsque $x \rightarrow 0$. Justifiez clairement vos calculs.

Exercice 4. (Quelques limites)

- (a) Calculez la limite de $\frac{\exp(x) - 1 - x}{x^2}$ lorsque $x \rightarrow 0$. Justifiez clairement vos calculs.
- (b) Calculez la limite de $\frac{\ln[\sin(x) + \cos(x)] - x + x^2}{x^2}$ lorsque $x \rightarrow 0$. Justifiez clairement vos calculs.

Exercice 5. (Des systèmes linéaires très simples)

- (a) Résoudre soigneusement le système suivant

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1, \\x + 2y + 3z &= 1, \\x + 2y + 4z &= 1.\end{aligned}$$

- (b) Pour quelles valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système suivant admet-il une solution unique ?

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1, \\x + 2y + 3z &= 1, \\x + 2y + az &= 1.\end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de donner la valeur explicite de la solution de ce système pour répondre à la question.

- (c) On reprend le **même** système que ci-dessus, dans le cas particulier où $a = 3$, c'est-à-dire le système

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1, \\x + 2y + 3z &= 1, \\x + 2y + 3z &= 1.\end{aligned}$$

Donner l'ensemble des solutions de ce système. Quel domaine géométrique simple représente, dans \mathbb{R}^3 muni du système de coordonnées habituel, l'ensemble des points de coordonnées (x, y, z) qui sont solution du système.

Exercice 6. (Familles libres)

On définit les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, dans \mathbb{R}^3 . Montrer soigneusement que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 7. (Interprétation géométrique d'un développement limité très simple)

- (a) Donner, par un développement limité approprié, l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f(x) = \frac{1}{2+x}$ en $x = 0$.
- (b) Dire, par un développement limité approprié, si la courbe représentative de $f(x) = \frac{1}{2+x}$ est au-dessus ou bien en-dessous de sa tangente en $x = 0$, lorsque x est proche de 0. Justifier. Faire un dessin si nécessaire.