Université Rennes I
L1- PCSTM

Année 2015-2016
OM2

Corrigé de plusieurs contrôles continus 3

Les documents, calculatrices et autres dispositifs électroniques sont interdits.

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer la forme échelonnée réduite de A.

Réponse. $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer le noyau de A.

Réponse. On cherche les solutions de $A\vec{x} = \vec{0}$. (a) nous dit que ce système est équivalent à $x = y - 3w$, $z = -w$. En posant $y = s$ et $z = t$ on trouve $s(1,1,0,0) + t(-3,0,-1,1)$. Conclusion : le noyau de A est l'ensembles des $s(1,1,0,0) + t(-3,0,-1,1)$, où $s \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ est arbitraire.

Pour vérfier le résultat, il suffit de montrer que $A\vec{u} = \vec{0}$ et $A\vec{v} = \vec{0}$, où $\vec{u} = (1,1,0,0)$, $\vec{v} = (-3,0,-1,1)$ (vu comme vecteurs colonnes).

Exercice 2.

(a) Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de l'origine (dans le sens direct).

(i) Donner la matrice de r.

Réponse. $R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Pour obtenir cette réponse, on peut utiliser le cours qui dit que la matrice d'une rotation d'angle θ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Il suffit de prendre $\theta = \frac{\pi}{4}$ pour obtenir R.

On peut aussi dire que la première colonne de R est $r(1,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, car si on applique une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ au vecteur $(1,0)$ on obtient $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. De même, la deuxième colonne de r est $r(0,1) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(ii) Cette application est-elle inversible ? Justifier votre réponse.

Réponse. $|R| = 1$. Comme $|R| \neq 0$, R est inversible. Comme la matrice R de r est inversible, r est aussi inversible.

(iii) Si l'application est inversible, donner la matrice de l'application inverse et décrire géométriquement cette application.

Réponse. La matrice de r^{-1} est R^{-1}. On a $R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Il s'agit de la matrice d'une rotation d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

(b) Même questions pour la projection p dans l'axe Ox.

Réponse. La matrice de p est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le déterminant de P est zéro, donc la matrice P n'est pas inversible, donc l'application p n'est pas inversible.

Pour déterminer P on peut utiliser une formule du cours, ou alors calculer $p(1,0) = (1,0)$ et $p(0,1) = (0,0)$.

Exercice 3.

(a) Décrire géométriquement l'application linéaire f qui est donnée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Réponse. Il s'agit de la matrice d'une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Pour trouver la réponse, on peut soit utiliser le cours qui dit que la matrice de la symétrie par rapport à la droite $y = x$ est A. On peut aussi dire que si $\vec{x} = (x, y)$, alors $f(\vec{x}) = A\,\vec{x} = (y, x)$. L'application qui transforme (x, y) en (y, x) est la symétrie par rapport à la droite $y = x$. On peut aussi dire que f envoye $(1, 0)$ sur $(0, 1)$ et $(0, 1)$ sur $(1, 0)$. La symétrie par rapport à la droite $y = x$ fait la même chose, donc sa matrice est A.

(b) Calculer A^2.

Réponse. On trouve la matrice identitée I.

(c) En déduire que f est inversible et donner f^{-1}.

Réponse. On a $A\,A = I$, donc A est inversible avec $A^{-1} = A$. La matrice de f^{-1} est $A^{-1} = A$, donc $f^{-1} = f$.

Par définition, A est inversible s'il existe une matrice B tel que $A\,B = I$. Or $A\,A = I$, donc A est inversible avec inverse A.

Il est faux de dire que f^{-1} est égal à A^{-1}. On peut seulement dire que la matrice de f^{-1} est A^{-1}, donc $f^{-1}\vec{x} = A^{-1}\vec{x}$.

Exercice 4.

(a) En utilisant le critère de linéarité, décider pour chacune des applications de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes si elle est linéaire ou non :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+2 \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x \end{pmatrix} \qquad h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \sin(x) \end{pmatrix}$$

Réponse. $f(0, 0) = (0, 2) \neq (0, 0)$, donc f n'est pas linéaire. (Une application linéaire vérifie toujours $f(\vec{0}) = \vec{0}$.)

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$, alors $g(\vec{u} + \vec{v}) = (2(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2), u_1 + v_1)$ et $g(\vec{u}) + g(\vec{v}) = ((2u_1 - u_2) + (2v_1 - v_2), u_1 + v_1)$. On a donc $g(\vec{u} + \vec{v}) = g(\vec{u}) + g(\vec{v})$.

$g(\lambda\vec{u}) = (2\lambda u_1 - \lambda u_2, \lambda u_1)$ et $\lambda g(\vec{u}) = (\lambda(2u_1 - u_2), \lambda u_1)$, donc $g(\lambda\vec{u}) = \lambda g(\vec{u})$.

Conclusion : g vérifie $g(\vec{u} + \vec{v}) = g(\vec{u}) + g(\vec{v})$ et $g(\lambda\vec{u}) = \lambda g(\vec{u})$, donc par le critère de linéarité, g est une application linéaire.

$2h(\frac{\pi}{2}, 0) = (0, 2)$ et $h(\pi, 0) = (0, 0)$, donc $2h(\frac{\pi}{2}, 0) \neq h(2(\frac{\pi}{2}, 0))$. Conclusion : h n'est pas linéarire.

Pour montrer qu'une application F est linéaire, il faut montrer que $F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v})$ et $F(\lambda\vec{u}) = \lambda g(\vec{u})$, pour tout vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et pour tout scalaire λ.

Pour montrer qu'une application F n'est pas linéaire, il suffit de trouver un contre exemple explicit.

(b) Si une application est linéaire, donner sa matrice.

Réponse. La matrice de g est $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Une érreure fréquente est de dire que $g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il faut dire que la matrice de g est G, ou alors que

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On considère la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer judicieusement le déterminant de cette matrice.
Réponse. : On a la suite d'égalité suivante :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 13 & 5 & 7 \\ 13 & 1 & 5 \\ 13 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 13 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} = (-2)(2)\det\begin{pmatrix} 13 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. On considère les applications suivantes :

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad / \quad \varphi(x,y,z,t) = (x+y+t,\ x+y+z+t,\ z+t)$$

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad / \quad \varphi(x,y,z) = (x+y+z,\ x,\ x+yz)$$

Sont elles des applications linéaires ? , dans l'affirmative donner la matrice correspondante et déterminer le noyau associé.
Réponse. : La première est une application linéaire, la seconde non. La matrice de la première s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin le noyau est engendré par le vecteur : $(1, -1, 0, 0)$

Exercice 7. On considère la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 135 \\ 2 & 4 & 6 & 246 \\ 3 & 5 & 7 & 357 \\ 4 & 6 & 8 & 468 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est nul. Expliquer pourquoi sans faire aucun calcul.
Réponse. La quatrième colonne est égale à 100 fois la première plus 10 fois le seconde plus la troisième, donc les quatre colonnes sont linéairement dépendantes

Exercice 8.
On considère les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{E}_1 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\} \qquad \mathbb{E}_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / x^2 + 2y + z = 0\}$$

$$\mathbb{E}_3 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / x = 0\} \qquad \mathbb{E}_4 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 / xyz = 0\}$$

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ? . En donner une base.
Réponse. $\mathbb{E}_1$ et $\mathbb{E}_3$ sont des sous espaces vectoriels, les deux restantes non. Une base de la première peut être : $\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}$ et pour la deuxième : $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$

Exercice 9. Soit l'application linéaire définie comme suit :

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad / \quad \varphi(x,y,z,t) = (x+y+t,\ x+y+z+t,\ z+t)$$

Donner la matrice de φ et déterminer le noyau.

Réponse. La matrice de φ s'écrit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Réponse. Une base du noyau peut être : $\{(1,-1,0,0)\}$

Exercice 10.

(a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \ln(\cos(x))$.
Réponse. $\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$.

(b) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en $+\infty$ de $g(x) = x\left[\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right]$.
Réponse. $x\left[\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right] = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{6}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 11.

(a) Déterminer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Réponse. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice regroupant ces trois vecteurs. Le volume du parallélogramme engendré par les vecteurs est égal à la valeur absolue du déterminant de A. On calcule : $\det(A) = -7$, donc le volume vaut 7.

(b) En déduire si ces vecteurs sont coplanaires.
Réponse. Puisque le volume est non nul, les vecteurs ne sont pas coplanaires.

Exercice 12. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Par la méthode de votre choix, calculer les déterminants des matrices A et B.
Réponse. Par la méthode de Sarrus, $\det(A) = 3 - 4 = -1$.
Par développement selon la première ligne, $\det(B) = 1.\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 0$. On peut aussi remarquer que la colonne 3 de B est l'opposée de la colonne 2, donc la matrice possède deux colonnes colinéaires, donc son déterminant est nul.

(b) Ces matrices sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.
Réponse. $\det(A) = -1 \neq 0$ donc A est inversible. Par l'algorithme d'élimination de Gauss, on trouve : $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. $\det(B) = 0$ donc B n'est pas inversible.

Exercice 13. On considère $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par :
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer la matrice associée à f.
Réponse.
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) En utilisant cette matrice, calculer $f(2,-2,-1)$.
Réponse.
$$f(2,-2,-1) = M\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. On considère les applications linéaires suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

(a) f_1 est la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'origine. Donner la matrice associée à cette application linéaire. Cette application linéaire est-elle inversible ? Si oui, quel est son inverse (en termes géométriques) et quelle est la matrice associée ?

Réponse.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

L'application inverse est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$, de matrice associée :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) f_2 est la projection orthogonale sur l'axe Oy. Mêmes questions.

Réponse.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application n'est pas inversible : les deux points $(1, 0)$ et $(2, 0)$ ont la même image $(0, 0)$ par la projection, donc l'application n'est pas injective.