Exercices de plusieurs contrôles continus 2

Les documents, calculatrices et autres dispositifs électroniques sont interdits.

Exercice 1. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +2y & +z & = & 1 \\ -2x & -4y & +z & = & 4 \\ x & +2y & -2z & = & -5 \end{array}\right.$$

Réponse.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3\to L_3-L_1]{L_2\to L_2+2L1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2\to\frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3\to L_3+3L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1\to L_1-L_2} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcr} x & +2y & = & -1 \\ & z & = & 2 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

La variable y est libre et on pose $y = s$, s un réel arbitraire:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2s \\ & s \\ 2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier le résultat, on vérifie que $(-1, 0, 2)$ est bien une solution du système, et que $(-2, 1, 0)$ est une solution du système homogène associé.

Exercice 2. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier votre résultat.

Réponse. En utilisant une formule du cours on obtient

$$A^{-1} = \frac{1}{5-6}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier le résultat:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise : Soient A et B deux matrices carrées de même taille. Alors B est la matrice réciproque de A si et seulement si $AB = I$. (On a alors automatiquement $BA = I$.

Variante:

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1\to\frac{1}{5}L_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2\to L_2-3L_1} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2\to -5L_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1\to L_1-\frac{2}{5}L_2} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

Exercice 3. (a) Calculer le déterminant des matrices suivantes et décider si elles sont inversibles:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -111 & -44 & 300 \\ 97 & 53 & 128 \\ -111 & -44 & 300 \end{pmatrix}$$

Réponse. Si on développe suivant la première colonne, on obtient

$$|A| = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$|A| \neq 0$, donc A est inversible.

$|B| = 0$, car B a deux lignes identiques. Variante: en appliquant $L_3 \to L_3 - L_1$ on produit une ligne nulle, donc $|B| = 0$. Le déterminant ayant nul, la matrice B n'est pas inversible.
On a utilisé: une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non zero.

(b) Si une matrice est inversible, calculer son inverse.

Réponse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \to \frac{1}{2} L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 - L_3]{L_2 \to L_2 - 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que $AA^{-1} = I_3$.

Exercice 4. Soient A, B les deux matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer AB.

(b) Expliquer pourquoi B est la matrice inverse de A.

(c) Résoudre le système $AX = V$, ou $X = (x, y, z)$ et $V = (2, 0, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Réponse. (a) Un calcul montre que $AB = I_3$, où I_3 est la matrice identitée de taille 3×3.
(b) Cours: La matrice A est inversible s'il existe une matrice C tel que $AC = I_3$. Dans ce cas on a $C = A^{-1}$. On a montré que $AB = I_3$ donc on déduit: (i) la matrice A est inversible et (ii): $B = A^{-1}$.
(c) Le système $AX = V$ est équivalent à $X = A^{-1}V$, donc $X = BV$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, transformer la matrice suivante en une matrice échelonnée réduite :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse. Après la suite d'opérations élémentaires sur les lignes: $L_2 \longleftrightarrow L_3$, puis $L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$, puis $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$, on obtient la matrice échelonnée réduite suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + y - z & = -2 \\ 2x - y + z & = 5 \\ x + 4y - 4z & = -11 \end{cases}$$

Réponse. La matrice du système est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & -4 & -11 \end{array}\right)$$

La suite d'opérations élémentaires sur les lignes: $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, puis $L_2 \longleftarrow -\frac{1}{3}L_2$, $L_3 \longleftarrow -\frac{1}{3}L_3$, puis $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$, puis $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$ conduit à la matrice échelonnée réduite suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

L'ensemble des solutions (une infinité) est donc l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 7. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer, si possible, l'inverse de A.

Réponse. Après avoir effectué la suite d'opérations élémentaires sur les lignes de $(A \parallel I_3)$: $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1$, puis $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$, puis $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_3$, $L_2 \longleftarrow L_2 - L_3$, puis $L_1 \longleftarrow L_1 - L_2$ on obtient la matrice augmentée $\left(I_3 \parallel A^{-1}\right)$ avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Déterminer le noyau de A et l'ensemble des solutions du système $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Réponse. - A est inversible donc

$$\mathrm{Ker}(A) = \{(0,0,0)\}$$

- Puisque A est inversible, on a comme unique solution

$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. (a) Trouver toutes les solutions du systme

$$\begin{cases} -x + y + z + 5w = 1 \\ \quad\quad y + 6z + 2w = 3 \\ -x + 2y + 7z + 7w = 4 \end{cases}$$

Réponse. La forme rduite du systme est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donc les solutions sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

(b) Dterminer (sans calcul supplmentaire) le noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Réponse.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tout} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

Exercice 9. (a) Trouver toutes les solutions du systme

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Réponse. une seule solution, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez la matrice inverse A^{-1}, et le produit $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Réponse.

$$A^{-1} = \frac{1}{3\cdot 1 - 2\cdot 1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(c) Expliquez pourquoi vous avez obtenu la mme rponse en (a) et en (b).

Réponse. Prenons l'quation

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

En mulitpliant les deux membres gauche par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ on obitient l'quation quivalente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Calculez, si possible, les inverses des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse. La matrice A n'est pas inversible, car $ad - bc = 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = 0$. Pour la matrice B, un petit calcul donne

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. Calculez, si possible le produit de deux matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. En utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss, résoudre le système linéraire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z & = 1 \\ 2x + 3y + z & = 1 \\ x + 2y + 3z & = 1 \end{cases}$$

Réponse. On écrit la matrice correspondant au système, et on la met sous forme échelonne rduite par l'algorithme d'limnation de Gauss. On dtaille les tapes:

(a) La matrice est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)$ (b) Pour faire apparatre des 0 sous le pivot 1, on fait $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ (c) On veut faire apparatre un 1 la place du -1, donc on fait

$L_1 \leftarrow -L_1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ (d) Il ne nous reste plus qu' faire apparatre des 0 au-dessus des pivots, en parcourant les colonnes pivots de droite gauche. On commence par la colonne 3 : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$
(e) On fait apparatre les 0 au-dessus du pivot par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$
(f) On fait apparatre un 0 au-dessus du pivot par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$
Il ne reste plus qu' lire la solution du systme : $x = -1$, $y = 1$ et $z = 0$.

Exercice 13. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $2A$.
Réponse.
$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer AX où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réponse.
$$AX = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(c) Calculer AB.
Réponse.
$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 13 & 10 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14.

(a) En utilisant l'algorithme d'élimination de Gauss, trouver A^{-1} l'inverse de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Réponse. (i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) On fait apparatre un 0 sous le pivot par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (iii) On fait apparatre un 0 au-dessus du pivot par $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire le noyau de A et X solution de $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Réponse. Comme A est inversible, $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.
$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff X = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 15. En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes, transformez la matrice suivante en matrice échelonnée réduite :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Réponse. Le premier pivot est obtenue en faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, il vient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les lignes L_2 et L_3 sont identiques.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La deuxime ligne est divise par 3 pour faire apparaître le deuxime pivot.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin, la matrice chelonne rduite est obtenue via $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 16. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = 0 \\ 2x + 4y + 6z & = 0 \\ 5x + 10y + 15z & = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z & = 6 \\ 2x - 3y - 8z & = 19 \\ 3x + y + 4z & = -2 \end{cases}$$

Réponse. Pour le premier système, $L_2 = 2L_1$ et $L_3 = 5L_1$ par conséquent, le système se réduit à la première équation. En considérant $y = s$ et $z = t$ comme variables libres, la solution s'écrit:

$$(x, y, z) = s(-2, 1, 0) + t(-3, 0, 1)$$

Quant au second système, il n'y a pas de combinaison linaire triviale, recherchons la forme échelonnée réduite de la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & -8 & 19 \\ 3 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Les zeros sous le premier pivot s'obtiennent par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -14 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \end{array}\right)$$

Les lignes 2 et 3 sont respectivement divisés par -7 et -5 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$.

Faisons apparaître le 0 sous le deuxième pivot $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right)$ Il reste à conclure en faisant apparaître la matrice identité: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right)$
La solution est obtenue $(x, y, z) = (3, 9, -5)$.

Exercice 17. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 8 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculez, si possible, les produits AB et CA.

(b) Calculez $C - 2B$.

(c) Pourquoi ne pouvons-nous calculer le carré de ces matrices?

Réponse.

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & -2 \\ 9 & 2 & 11 & -1 \\ -1 & 6 & -9 & 11 \\ 5 & 10 & -5 & 15 \end{pmatrix} \qquad CA = \begin{pmatrix} 19 & 10 \\ 12 & -18 \end{pmatrix} \qquad C - 2B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Seule les matrices carrs peuvent tre multiplie par elles-mmes, aucune ne l'est ici.

Exercice 18. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

(a) Calculez l'inverse de A.

(b) Déterminez le noyau de A et l'ensemble des solutions du système $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Réponse. L'inverse de la matrice est:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice est inversible, le noyau est rduit $(0, 0)$. Enfin $X = A^{-1}B = \frac{1}{2}(-3, -4)$.

Exercice 19. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite.
Réponse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 20. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^3 - A^2 + 4A + 6Id = 0$ où Id désigne la matrice identité. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Réponse.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 0 \\ 2 & -4 & -10 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 40 \\ -2 & -14 & 10 \\ 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

d'où l'égalité. La matrice A est inversible car : $A(A^2 - A + 4Id) = (A^2 - A + 4Id)A = -6Id$

Exercice 21. Résoudre le système suivant, donner les variables libres et les variables liées :

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 1 \\ x - y + t = 3 \end{cases}$$

Réponse. $x = 2 - z - t$ *et* $y = -1 - z$; variables libres : z et t, variables liées : x et y

Exercice 22. On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer le produits AB.

Réponse.

$$\begin{pmatrix} 11 & 25 \\ 17 & 17 \end{pmatrix}$$

Exercice 23. On considère les matrice A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^4, B^3 et $(AB)^{12}$ que peut on en déduire ?

Réponse. Le produit n'est pas commutatif car on a $A^4 = B^3 = Id$ mais $(AB)^{12}$ égale à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$