Université Rennes I — Année 2015-2016

L1- PCSTM — OM2

Corrigé du contrôle continu 1 du 22/02/2016 - Durée 1 heure

Les documents, calculatrices et autres dispositifs électroniques sont interdits.

Exercice 1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \sin(x)$.

Réponse : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Exercice 2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

(a) $\ln(1+2x)$ *Réponse :* $2x - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

(b) $e^x + \cos(x)$ *Réponse :* $2 + x + x^2\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

(c) $e^x\ln(1+x)$ *Réponse :* $x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Exercice 3. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

(a) $\ln(1+x+x^2)$ *Réponse :* $x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

(b) $\sqrt{\cos(x)}$ *Réponse :* $1 - \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

(c) $\dfrac{1+\ln(1+x)}{e^x}$ *Réponse :* $1 - x^2 + x^2\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

(d) $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$ *Réponse :* $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)} = \dfrac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)} = \dfrac{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)}$.

Une division suivant les puissances croissantes donne $1 + x + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Remarques sur la solution :

— Avant de faire une division, il faut s'assurer que le dénominateur ne s'annulle pas en 0. Donc on a mis en facteur x au numérateur et dénominateur et on l'a simplifié. Comme l'ordre diminue, il faut commencer avec un développement d'ordre 3.

— Si vous faites directement une division de $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ par $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ vous obtenez :

$$
\begin{array}{rrr|l}
x & +\frac{x^2}{2} & & x - \frac{x^2}{2} \\ \cline{4-4}
x & -\frac{x^2}{2} & & 1 + x \\ \cline{1-2}
 & x^2 & & \\
 & x^2 & +\cdots & \\ \cline{2-3}
 & 0 & +\cdots &
\end{array}
$$

Il ne sert à rien de déterminer le terme en x^3 dans la quatrième ligne du tableau de la division ci-dessus, vu qu'on n'utilise pas le terme en x^3 de $e^x - 1$. Le résultat est donc un développement d'ordre 1.

Pour obtenir un développement d'ordre 2, il faut commencer avec l'ordre 3 :

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x & +\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{6} & & x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \\ \cline{5-5}
x & -\frac{x^2}{2} & +\frac{x^3}{3} & & 1 + x + \frac{x^2}{3} \\ \cline{1-3}
 & x^2 & -\frac{x^3}{6} & & \\
 & x^2 & -\frac{x^3}{2} & +\cdots & \\ \cline{2-4}
 & & +\frac{x^3}{3} & +\cdots & \\
 & & +\frac{x^3}{3} & +\cdots & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & +\cdots &
\end{array}
$$

Avec cette méthode, on obtient aussi le bon resultat.

Exercice 4. Déterminer en utilisant des développements limités les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x}-1}$.

Réponse : $\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x}-1} = \dfrac{x^2+x^2\varepsilon(x)}{\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)} = \dfrac{x^2}{x}\dfrac{1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon(x)} = x\dfrac{1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{2}+\varepsilon(x)} \to 0$, lorsque $x \to 0$.

Remarques sur la solution :

— N'oubliez pas d'écrire les $\varepsilon(x)$. Il est faux d'écrire $\frac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{x^2}{\frac{x}{2}} = 2x$.

— Il n'est pas nécessaire de développer numérateur et dénominateur au même ordre.

— Il n'est pas utile de factoriser numérateur et dénominateur par la même puissance. Si vous factorisez les deux par x, vous obtenez le bon resultat. Par contre, si vous factorisez par x^2 vous obtenez : $\dfrac{1+\varepsilon(x)}{\frac{1}{2x}+\frac{1}{x}\varepsilon(x)}$. On ne connait pas la limite de $\dfrac{1}{x}\varepsilon(x)$.

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos(x)-1}$.

Réponse : $\dfrac{\ln(1+x)-x}{\cos(x)-1} = \dfrac{-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}{-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)} = \dfrac{-\frac{1}{2}+\varepsilon(x)}{-\frac{1}{2}+\varepsilon(x)} \to 1$, lorsque $x \to 0$.

Remarques sur la solution :

— Il n'est pas vrai que $\frac{1+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)} = 1$. La fonction $\varepsilon(x)$ du numérateur est différente de celle du numérateur. Si vous avez un doute, écrivez $\frac{1+\varepsilon_1(x)}{1+\varepsilon_2(x)}$.

Exercice 5. Soit $f(x) = 1 - x + 2x^3 + x^3\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Déterminer une équation de la droite tangente de f en 0 ainsi que la position relative de la courbe et de la droite tangente de f pour x proche de 0.

Réponse : Une équation de la droite tangente en 0 est $y = 1-x$. $f(x)-y = 2x^3+x^3\varepsilon(x) = x^3(2+\varepsilon(x))$. Pour x proche de 0, $\varepsilon(x)$ est petit, donc $2+\varepsilon(x) > 0$. Donc proche de 0, $f(x)-y$ et $2x^3$ ont le même signe qui est positif si $x > 0$ et négatif, si x est négatif. Donc proche de 0, la courbe de f est au-dessus de la tangente y si $x > 0$, et en-dessous si $x < 0$.

Remarques sur la solution :

— La rédaction suivante est acceptable (bien que moins soigneuse) : $y = 1-x$ est l'équation de la droite tangent en 0 et pour connaitre la position relative de la courbe et de la tangente proche de 0, il suffit d'étudier le signe de $2x^3$ qui est ...

— Par contre, il ne faut pas oublier de spécifier qu'on a déterminé la position relative « proche de 0 ». En particulier, il est faux de dire que $f(x) - y = 2x^3$.

Exercice 6. Soit $f(x) = 1-x^4+x^4\varepsilon(x)$, $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Décider si f admet un maximum ou minimum local en 0.

Réponse : La droite tangente de f en 0 est $y = 1$, donc une droite horizontale, donc on pourrait avoir un extremum. Pour étudier la position relative de f et de la droite tangente (proche de 0) on étudie le signe de $-x^4$. Or $-x^4 \leq 0$, donc la courbe est en dessous de sa tangente proche de 0. Conclusion : f admet un maximum relatif en 0.

Redaction alternative : Il n'est pas nécessaire de parler de la droite tangente. Il suffit de dire qu'on a $f(0) = 1$ et, proche de 0, $f(x) - f(0)$ a le même signe que $-x^4$ qui est négatif ou zero. Donc, proche de 0, on a $f(x) - f(0) \leq 0$, donc $f(x) \leq f(0)$, ce qui implique que f admet un maximum local en 0.

Exercice 7.

(a) Calculez le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$.

Réponse : $\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}(x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)) = 1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon(x)$.

(b) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Réponse : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^{1-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)} = e^1 e^{-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)} = e(1-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)) = e-\frac{e}{2}x+x\varepsilon(x)$.

Remarques sur la solution :

— On veut un développement d'ordre 1 pour la question (a), mais comme on divise par x, il faut commencer par un développement de $\ln(1+x)$ d'ordre 2.

— En divisant par x il ne faut pas oublier de diviser aussi le terme $x^2\varepsilon(x)$.

— Pour (b), on ne peut pas utiliser le développement limité de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{x}$ car α doit être une constante.

— On a utilisé la définition d'une puissance : $a^b = e^{b\ln(a)}$.

— On a aussi utilisé $u^u = 1+u+u\varepsilon(u)$ avec $u = -\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)$. Cette substitution est « permise » car on a $\lim_{x\to 0} u = 0$.

— Si pour développer $e^{1-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)}$ vous utilisez $e^u = 1+u+u\varepsilon(u)$ avec $u = 1-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)$, alors vous obtenez $1+(1-\frac{x}{2})+(1-\frac{x}{2})\varepsilon(1-\frac{x}{2})$. On ne connait pas $\lim_{x\to 0}\varepsilon(1-\frac{x}{2})$.

— Il est faux de remplacer $(1-\frac{x}{2})\varepsilon(1-\frac{x}{2})$ par $x\varepsilon(x)$. Si vous le faites vous obtenez $e^{1-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)} = 2-\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)$, et en faisant $x\to 0$, $e^1 = 2$ ce qui est faux.

Exercice 8.

Déterminer le développement limité d'ordre 2 en $+\infty$ de la fonction $f(x) = x^2(1-\cos(\dfrac{1}{x}))$.

Réponse : On utilise $h = 1/x$, $x = 1/h$ et on développe $\cos(h)$ pour h en 0.
$f(x) = \frac{1}{h^2}(1-\cos(h)) = \frac{1}{h^2}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{24} + h^4\varepsilon(h)\right) = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{24} + h^2\varepsilon(h) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x})$, où $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$.

Remarques sur la solution :

— Il est faux d'écrire $\frac{1}{h^2}\left(\frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right) = \frac{1}{2} + h^2\varepsilon(h)$.

— Il est faux de remplacer $h^2\varepsilon(h)$ par $x^2\varepsilon(x)$.

— On peut remplacer $\varepsilon(\frac{1}{x})$ et $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$ par $\varepsilon(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(x) = 0$. On a tout simplement posé $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(\frac{1}{x})$ et ensuite on écrit $\varepsilon(x)$ au lieu de $\varepsilon_1(x)$.