Université Rennes I
L1- PCSTM

Année 2014-2015
OM2

Corrigé du contrôle continu 2 du 08/04/2015 - Durée 1 heure

Exercice 1. (5pts : 2+2 et 0,5+0,5 pour la vérification.) Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\text{(a)} \begin{cases} x & +2y & +z & = & 0 \\ 3x & +7y & +z & = & 0 \\ x & +y & +3z & = & 0 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ 2x & +3y & +2z & = & 5 \\ x & +2y & +2z & = & 6 \end{cases}$$

Vérifier votre réponse.

Réponse. (a) La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, et après la succession des opérations élémentaires suivantes : $L_2 \to L_2 - 3L_1$ et $L_3 \to L_3 - L_1$, puis $L_3 \to L_3 + L_2$, et enfin $L_1 \to L_1 - 2L_2$, on obtient la matrice échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x et y sont les variables liées et z est une variable libre.
On pose $z = s$, les solutions du système sont donc $(x, y, z) = s(-5, 2, 1)$, $s \in \mathbb{R}$. On vérifie que les triplets de cette forme sont bien solutions de chacune des équations du système (a).

(b) La matrice augmentée du système est $B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right)$, et après la succession des opérations élémentaires suivantes : $L_2 \to L_2 - 2L_1$ et $L_3 \to L_3 - L_1$, puis $L_3 \to L_3 - L_2$, et enfin $L_1 \to L_1 - (L_2 + L_3)$, on obtient la matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

L'unique solution du système (b) est donc $(x, y, z) = (-2, 1, 3)$.
On vérifie que ce triplet est solution de chacune des équations du système (b).

Exercice 2. (6,5 pts : 1,5+0,5 pour A et 1+0,5+0,5+1,5+1(vérification) pour B.) On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chacune des matrices : (i) calculer son déterminant et décider si elle est inversible.
(ii) Si elle est inversible, calculer le déterminant de son inverse, puis son inverse et vérifier votre réponse en calculant le produit de la matrice et de son inverse.

Réponse. • A : Par la méthode de Sarrus par exemple, on trouve $\det(A) = +(-9+8-1)-(6-2-6) = -2+2 = 0$. Le déterminant est nul, donc A n'est pas inversible.

• B : En développant selon la première colonne de B, on a $\det(B) = +1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$. $\det(B) \neq 0$, donc B est inversible. $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det(B)} = -1$.
Pour calculer l'inverse de B, on procède par opérations élémentaires sur $(B|I_3)$, la matrice B augmentée de la matrice idenditée de taille 3, et on a après la succession d'opérations élémentaires suivantes :

$$L_2 \longleftrightarrow L_3 \quad L_2 \to L_2 - L_3 \quad \text{puis} \quad L_1 \to L_1 - 2L_2$$

on obtient $(I_3|B^{-1})$ avec $\mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que $BB^{-1} = I_3$.

Exercice 3. (1 pt) Déterminer l'aire dans $\mathbb{R}^2$ du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v}_1 = (1,4)$, $\vec{v}_2 = (3,7)$.

Notons $\mathcal{P}$ le parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$. On a :

$$\text{Aire}(\mathcal{P}) = |\det(\vec{v_1}, \vec{v_2})| = |\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}| = |-5| = 5$$

Exercice 4. (4 pts : 1pt pour la question de cours, 1pt pour f_1, 1,5 + 0,5 (matrice) pour f_2.)

(a) (*Question de cours.*) Par définition, une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire si elle est de la forme $f(\vec{x}) = A\vec{x}$, avec A une matrice. Énoncer le critère de linéarité donné en cours qui caractérise les applications linéaires.

(b) Décider pour chacune des applications suivantes si elle est linéaire, soit en montrant que l'application vérifie les conditions de linéarité, soit en donnant un contre-exemple qui montre qu'une des conditions n'est pas vérifiée.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ z \\ x+3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Si l'application est linéaire, déterminer sa matrice.

Réponse. (a) L'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est linéaire (donc s'écrit comme $f(\vec{x}) = A\,\vec{x}$) si et seulement si f vérifie :

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \quad \text{et} \quad f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u}), \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n. \qquad \text{(Linéarité)}$$

(Variante : f est linéaire si et seulement si

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}), \quad \text{pour tout } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n. \qquad \text{(Linéarité bis)}$$

Une application linéaire f vérifie toujours $f(\vec{0}) = \vec{0}$ (prendre $\lambda = 0$ dans la condition (Linéarité).)

(b) • f_1 n'est pas linéaire car $f_1(\vec{0}) \neq \vec{0}$: $f_1(0,0,0) = (0,0,3) \neq (0,0,0)$.

(*Variante* : Si on veut utiliser (Linéarité) : $f_1(2(x,y,z)) = f_1(2x,2y,2z) = (2x+4y, 2z, 2x+3)$, alors que $2f_1(x,y,z) = (2x+4y, 2z, 2x+6)$.)

• f_2 est linéaire :

$$f_2(\lambda(x,y)) = f_2(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x + 2\lambda y, \lambda y) \quad \text{et} \quad \lambda f_2(x,y) = (\lambda(x+y), \lambda(x+2y), \lambda y).$$

En développant, on voit que $f_2(\lambda(x,y)) = \lambda f_2(x,y)$.

$$f_2((x,y) + (x',y')) = f_2((x+x', y+y')) = ((x+x') + (y+y'), (x+x') + 2(y+y'), y+y')$$

et

$$f_2(x,y) + f_2(x',y') = ((x+y) + (x'+y'), (x+2y) + (x'+2y'), y+y').$$

En développant, on voit que $f_2((x,y) + (x',y')) = f_2(x,y) + f_2(x',y')$.

Donc f_2 vérifie aux conditions de (Linéarité).

La matrice de f_2 est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5. (3,5 points : 3 x 0.5 pour les trois matrices et 0,5+0,5+1 pour l'inversibilité.)

On considère les applications linéaires suivantes, de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même :

f_1 **:** La projection orthogonale sur l'axe $0y$.

f_2 **:** La symétrie par rapport à l'axe $0x$.

f_3 **:** La rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine.

Pour chacune de ces applications :

(a) Déterminer sa matrice.

(b) Décider si l'application est inversible, et, le cas échéant, donner son inverse (interprétation géométrique et matrice associée).

Réponse. • f_1 :

$$f_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0x & +0y \\ 0x & +y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de f_1 est 0, donc M_1 et donc f_1 ne sont pas inversibles. • f_2 :

$$f_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & +0y \\ 0x & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ de f_2 est -1, donc M_2 et donc f_2 sont inversibles. L'inverse de M_2 est aussi M_2, donc l'inverse de f_2 est aussi f_2, autrement dit, la symétrie par rapport à l'axe $0x$.
• f_3 : On a $f_3(1,0) = (0,-1)$ et $f_3(0,1) = (1,0)$, donc les colonnes de la matrice M_3 de f_3 sont $(0,-1)$ et $(1,0)$:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de M_3 est $1 \neq 0$, donc f_3 est inversible. La matrice de f_3^{-1} est

$$M_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

M_3^{-1} est la matrice d'une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine, donc f_3^{-1} est cette rotation.