Corrigé du contrôle continu 1 du 23/02/2015 - Durée 1 heure

Exercice 1. (4pts) Déterminer le $DL_2(0)$ des fonctions suivantes :

(a) $\cos(2x)$ (b) $e^x + 2\sqrt{1+x}$ (c) $\cos(x)e^x$ (d) e^{x+x^2}

Réponse.

(a) $\cos(2x) = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = 1 - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

(b) $e^x + 2\sqrt{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + 2\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right) + x^2\varepsilon(x) = 3 + 2x + \dfrac{1}{4}x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

(c) $\cos(x)e^x = \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) = 1 + x + x^2\varepsilon(x)$.

(d) $e^{x+x^2} = 1 + (x+x^2) + \dfrac{(x+x^2)^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

Erreur fréquente : Attention, $e^{x^2} \neq e^{2x}$.

Exercice 2. (4pts) Déterminer le $DL_2(0)$ des fonctions suivantes :

(a) $\sqrt{1-x}$ (b) $\sqrt{\cos(x)}$ (c) $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin(x)}$

Réponse. (a) $\sqrt{1-x} = 1 + \dfrac{(-x)}{2} - \dfrac{(-x)^2}{8} + x^2\varepsilon(x) = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$.

(b) $\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)} = 1 - \dfrac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)$.

$$\text{(c)}\quad \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right)\frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)} = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)\right)\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)}$$
$$= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

Variante :

$$\begin{array}{cccc|l}
1 & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{3}x^2 & & 1 - \frac{1}{6}x^2 \\ \cline{5-5}
1 & & -\frac{1}{6}x^2 & & 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \\ \hline
 & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}x^2 & & \\
 & -\frac{1}{2}x & & +\cdots & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{1}{2}x^2 & +\cdots & \\
 & & \frac{1}{2}x^2 & +\cdots & \\ \cline{3-4}
 & & 0 & +\cdots &
\end{array}$$

Erreur fréquente : Il ne faut pas faire la division suivant les puissances croissantes de $x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ par $x + x^2\varepsilon(x)$. En faisant la division, il faut s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas en 0. En divisant le numérateur et le dénominateur par x on perd un ordre. Donc il faut commencer avec un DL d'ordre 3.

Exercice 3. (1.5pts) Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2+x^3}$.

Réponse. $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2+x^3} = \dfrac{\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)}{x^2+x^3} = \dfrac{\frac{1}{2} + \varepsilon(x)}{1+x}$, donc on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2+x^3} = \frac{1}{2}$.

Exercice 4. (1.5pts) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(3)$ de e^x.

Réponse. On pose $u = x - 3$. On a :

$$e^x = e^{u+3} = e^3 e^u = e^3\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)\right) = e^3 + e^3(x-3) + \frac{e^3}{2}(x-3)^2 + (x-3)^2\varepsilon(x-3),$$

où $\lim_{x\to 3}\varepsilon(x-3) = 0$.

Exercice 5. (2pts)

(a) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(+\infty)$ de $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Réponse. (a) On pose $h = 1/x$. Si $x \to +\infty$ alors $h \to 0$, donc on peut développer pour h en 0 : $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \sin(h) = h - \dfrac{1}{6}h^3 + h^3\varepsilon(h) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\,\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$, où $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty}\varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$.

Erreur fréquente : Quand on multiplie un DL_n par x, on multiplie aussi le reste $x^n\varepsilon(x)$ par x. Ici, on perd ainsi un ordre : $x\left(\dfrac{1}{x^3}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{x^2}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 1.$

Exercice 6. (3pts)

(a) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = x\ln(1+x)$.

(b) En déduire le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $g(x) = (1+x)^x$.

Réponse.

(a) $f(x) = x\ln(1+x) = x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

(b) $g(x) = (1+x)^x = e^{x\ln(1+x)} = e^{x^2 + x^2\varepsilon(x)} = 1 + x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

Erreure fréquente : On ne peut pas utiliser le DL de $(1+x)^\alpha$. α est une constante, donc on ne peut pas poser $\alpha = x$. *Erreure grossière :* $e^{ab} \neq e^a e^b$!!!

Exercice 7. (4pts)

(a) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $g(x) = \dfrac{2+x^2}{1+2x}$.

(b) Soit $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+2}$. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(+\infty)$ de $\dfrac{f(x)}{x}$.

(c) En déduire une équation de l'asymptote oblique à $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+2}$ en $+\infty$ ainsi que les positions relatives de la courbe et de son asymptote oblique en $+\infty$.

Réponse.

(a) $\dfrac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 - 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)$, donc :

$g(x) = \dfrac{2+x^2}{1+2x} = (2+x^2)(1 - 2x + 4x^2 + x^2\varepsilon(x)) = 2 - 4x + 9x^2 + x^2\varepsilon(x)$.

(b) $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2x^2+1}{x(x+2)} = \dfrac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \dfrac{2+u^2}{1+2u}$ en posant $u = \dfrac{1}{x}$, et on obtient par la question a) :

$\dfrac{f(x)}{x} = 2 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{9}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(c) On a $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{9}{x} + \dfrac{1}{x}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donc l'équation de son asymptote oblique est $y = 2x - 4$.

$f(x) - y = \dfrac{9}{x} + \dfrac{1}{x}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ car $x > 0$ $(x \to +\infty)$, la courbe est donc au-dessus de son asymptote.