

Opérateur de Schrödinger avec potentiel oscillant

Potentiel effectif et bifurcation de valeurs propres

Vincent Duchêne

(collaboration avec Michael Weinstein, Iva Vukićević, Nicolas Raymond)

CNRS & IRMAR, Univ. Rennes 1

IHP, 13 mars 2017

Plan de l'exposé

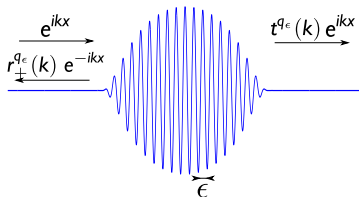
- 1 Motivation
- 2 Preuve 1
- 3 Preuve 2
- 4 Preuve 3
- 5 Preuve 4

Scattering

$$\left(D_x^2 + q_\epsilon\right)\psi^\epsilon = k^2\psi^\epsilon, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \psi^\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$$

où $q_\epsilon(x) = q(x, x/\epsilon) \in \mathbb{R}$ est régulière et vérifie

- $x \mapsto q(x, \cdot)$ est décroissante à l'infini;
- $y \mapsto q(\cdot, y)$ est 1-périodique et de moyenne nulle.



Soit $t^{q_\epsilon}(k)$ le coefficients de transmission associée à la solution

$$\psi^\epsilon(x; k) = e^{ikx} + \text{outgoing}.$$

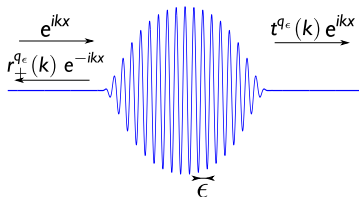
Q : quel est le comportement de $t^{q_\epsilon}(k)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$?

Scattering

$$\left(D_x^2 + q_\epsilon\right)\psi^\epsilon = k^2\psi^\epsilon, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \psi^\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$$

où $q_\epsilon(x) = q(x, x/\epsilon) \in \mathbb{R}$ est régulière et vérifie

- $x \mapsto q(x, \cdot)$ est décroissante à l'infini;
- $y \mapsto q(\cdot, y)$ est 1-périodique et de moyenne nulle.



Soit $t^{q_\epsilon}(k)$ le coefficients de transmission associée à la solution

$$\psi^\epsilon(x; k) = e^{ikx} + \text{outgoing}.$$

Q : quel est le comportement de $t^{q_\epsilon}(k)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$?

Rappel d'homogénéisation

$$\left(D_x^2 + q_\epsilon\right)\psi^\epsilon = k^2\psi^\epsilon, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \psi^\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

On cherche ψ^ϵ sous la forme

$$\psi^\epsilon(x) = \Psi_0(x, x/\epsilon) + \epsilon\Psi_1(x, x/\epsilon) + \epsilon^2\Psi_2(x, x/\epsilon) + \dots$$

On plonge l'Ansatz dans l'équation et on résoud à chaque ordre

- Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$:

$$-\partial_y^2\Psi_0 = 0$$

- Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$

$$-\partial_y^2\Psi_1 - 2\partial_x\partial_y\Psi_0 = 0$$

- Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$

$$-\partial_y^2\Psi_2 - 2\partial_x\partial_y\Psi_1 - \partial_x^2\Psi_0 + q - k^2\Psi_0 = 0$$

On obtient (formellement)

$$\psi^\epsilon(x) = e^{ikx} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \implies t^{q_\epsilon}(k) = t^0(k) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Rappel d'homogénéisation

$$\left(D_x^2 + q_\epsilon\right)\psi^\epsilon = k^2\psi^\epsilon, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \psi^\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

On cherche ψ^ϵ sous la forme

$$\psi^\epsilon(x) = \Psi_0(x, x/\epsilon) + \epsilon\Psi_1(x, x/\epsilon) + \epsilon^2\Psi_2(x, x/\epsilon) + \dots$$

On plonge l'Ansatz dans l'équation et on résoud à chaque ordre

- Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$:

$$-\partial_y^2\Psi_0 = 0$$

- Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$

$$-\partial_y^2\Psi_1 - 2\partial_x\partial_y\Psi_0 = 0$$

- Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$

$$-\partial_y^2\Psi_2 - 2\partial_x\partial_y\Psi_1 - \partial_x^2\Psi_0 + q - k^2\Psi_0 = 0$$

On obtient (formellement)

$$\psi^\epsilon(x) = e^{ikx} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \implies t^{q_\epsilon}(k) = t^0(k) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Rappel d'homogénéisation

$$\left(D_x^2 + q_\epsilon\right)\psi^\epsilon = k^2\psi^\epsilon, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \psi^\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

On cherche ψ^ϵ sous la forme

$$\psi^\epsilon(x) = \Psi_0(x, x/\epsilon) + \epsilon\Psi_1(x, x/\epsilon) + \epsilon^2\Psi_2(x, x/\epsilon) + \dots$$

On plonge l'Ansatz dans l'équation et on résoud à chaque ordre

- Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$:

$$-\partial_y^2\Psi_0 = 0 \quad \implies \Psi_0(x, y) = \Psi_0(x)$$

- Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$

$$-\partial_y^2\Psi_1 - 2\partial_x\partial_y\Psi_0 = 0 \quad \implies \Psi_1(x, y) = \Psi_1(x)$$

- Ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$

$$-\partial_y^2\Psi_2 - 2\partial_x\partial_y\Psi_1 - \partial_x^2\Psi_0 + q - k^2\Psi_0 = 0 \quad \implies \Psi_0(x) = e^{ikx}$$

On obtient (formellement)

$$\psi^\epsilon(x) = e^{ikx} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \implies t^{q_\epsilon}(k) = t^0(k) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Q : quel est le comportement de $t^{q_\epsilon}(k)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$?

R : Pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t^{q_\epsilon}(k) = t^0(k) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

La convergence n'est pas uniforme en $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

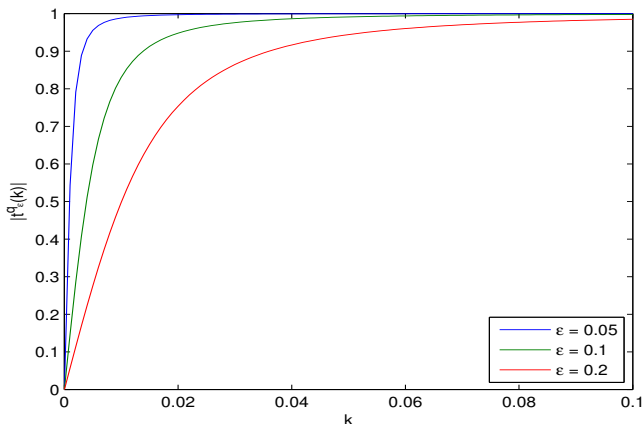
Un potentiel générique, V , vérifie $t^V(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow 0$.

Q : quel est le comportement de $t^{q_\epsilon}(k)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$?

R : Pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t^{q_\epsilon}(k) = t^0(k) + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

La convergence n'est pas uniforme en $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Un potentiel générique, V , vérifie $t^V(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow 0$.



Pb : caractériser le comportement de $t^{q_\epsilon}(k)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$ et $k \approx 0$.

Plan de l'exposé

1 Motivation

2 Preuve 1

3 Preuve 2

4 Preuve 3

5 Preuve 4

[VD, I. Vukićević, M.I. Weinstein '14]

Soit $q_\epsilon = \sum_{j \neq 0} q_j(x) e^{2\pi i j x / \epsilon}$ telle que $\|q_\epsilon\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |q_j e^{\beta \langle \cdot \rangle}|_{W^{3,\infty}} < \infty$ ($\beta > 0$)

Il existe $\epsilon_0 > 0$ et K voisinage complexe compact de 0 tel que

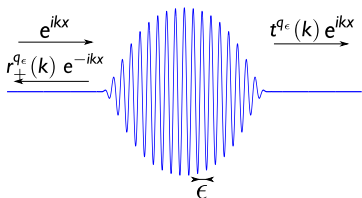
$$\forall (\epsilon, k) \in (0, \epsilon_0) \times K, \quad \left| \frac{k}{t^{q_\epsilon}(k)} - \frac{k}{t^{\sigma_\epsilon^{\text{eff}}}(k)} \right| \leq \epsilon^3 C(K, \|q_\epsilon\|)$$

$$\text{où } \sigma_\epsilon^{\text{eff}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\epsilon^2 \Lambda_{\text{eff}}(x) = -\epsilon^2 \sum_{j \neq 0} \frac{|q_j(x)|^2}{(2\pi j)^2}.$$

Conséquences

- 1 Convergence uniforme : $\sup_{k \in \mathbb{R}} |t^{q_\epsilon}(k) - t^{\sigma_\epsilon^{\text{eff}}}(k)| = \mathcal{O}(\epsilon)$;
- 2 Pour $\kappa \neq i \frac{\int_{\mathbb{R}} \Lambda_{\text{eff}}}{2}$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} t^{q_\epsilon}(\epsilon^2 \kappa) = \frac{\kappa}{\kappa - i \frac{\int_{\mathbb{R}} \Lambda_{\text{eff}}}{2}}$;
- 3 Pour ϵ assez petit, il existe $k_\epsilon = i \epsilon^2 \frac{\int_{\mathbb{R}} \Lambda_{\text{eff}}}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ pôle de $t^{q_\epsilon}(k)$.
 $E^\epsilon = k_\epsilon^2 < 0$ est une valeur propre de $(D_x^2 + q_\epsilon)$.

Esquisse de preuve



On définit la solution de Jost

$$f_{+}^{q_{\epsilon}}(x; k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{t^{q_{\epsilon}}(k)} \psi^{\epsilon}(x; k).$$

La solution de Jost est l'unique solution de l'équation de Volterra

$$f_{+}^{q_{\epsilon}}(x; k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} \frac{e^{ik(y-x)} - e^{ik(x-y)}}{2ik} q_{\epsilon}(y) f_{+}^{q_{\epsilon}}(y; k) dy$$

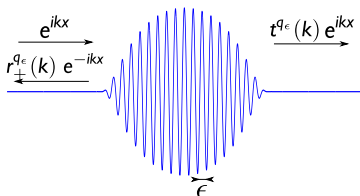
et l'on a [Deift, Trubowitz '79]

$$\frac{k}{t^{q_{\epsilon}}(k)} = k - \frac{1}{2i} I^{q_{\epsilon}}(k), \quad I^{q_{\epsilon}}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} q_{\epsilon}(y) f_{+}^{q_{\epsilon}}(y; k) dy.$$

Plus généralement,

$$\frac{k}{t^{q_{\epsilon}}(k)} - \frac{k}{t^{\sigma}(k)} = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} f_{-}^{\sigma}(y; k) (q_{\epsilon}(y) - \sigma(y)) f_{+}^{q_{\epsilon}}(y; k) dy.$$

Esquisse de preuve



On définit la solution de Jost

$$f_{+}^{q_{\epsilon}}(x; k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{t^{q_{\epsilon}}(k)} \psi^{\epsilon}(x; k).$$

La solution de Jost est l'unique solution de l'équation de Volterra

$$f_{+}^{q_{\epsilon}}(x; k) = e^{ikx} + \int_x^{\infty} \frac{e^{ik(y-x)} - e^{ik(x-y)}}{2ik} q_{\epsilon}(y) f_{+}^{q_{\epsilon}}(y; k) dy$$

et l'on a [Deift, Trubowitz '79]

$$\frac{k}{t^{q_{\epsilon}}(k)} = k - \frac{1}{2i} I^{q_{\epsilon}}(k), \quad I^{q_{\epsilon}}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} q_{\epsilon}(y) f_{+}^{q_{\epsilon}}(y; k) dy.$$

Plus généralement,

$$\frac{k}{t^{q_{\epsilon}}(k)} - \frac{k}{t^{\sigma}(k)} = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} f_{-}^{\sigma}(y; k) (q_{\epsilon}(y) - \sigma(y)) f_{+}^{q_{\epsilon}}(y; k) dy.$$

Esquisse de preuve

On utilise l'identité

$$f_+^{q_\epsilon}(x; k) = e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{e^{ik(y-x)} - e^{ik(x-y)}}{2ik} q_\epsilon(y) f_+^{q_\epsilon}(y; k) dy$$

dans l'expression

$$\frac{k}{t^{q_\epsilon}(k)} - \frac{k}{t^\sigma(k)} = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) f_+^{q_\epsilon}(x; k) dx + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) \sigma(x) f_+^{q_\epsilon}(x; k) dx.$$

La contribution $\int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) e^{ikx} = \sum_{j \neq 0} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_j(x) e^{ikx} e^{2\pi i j x / \epsilon} = \mathcal{O}(\epsilon^3)$.

Par intégration par parties, on obtient pour la seconde contribution

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) \int_x^\infty \frac{e^{ik(y-x)} - e^{ik(x-y)}}{2ik} q_\epsilon(y) f_+^{q_\epsilon}(y; k) dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) \sum_{j \neq 0} \frac{\epsilon^2}{(2\pi i j)^2} q_j(x) e^{2\pi i j x / \epsilon} f_+^{q_\epsilon}(y; k) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \sum_{j \neq 0} \frac{\epsilon^2}{(2\pi i j)^2} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_{-j}(x) q_j(x) f_+^{q_\epsilon}(y; k) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

que l'on compense par le choix $\sigma(x) = -\sum_{j \neq 0} \frac{\epsilon^2}{(2\pi j)^2} |q_j(x)|^2$.

Esquisse de preuve

On utilise l'identité

$$f_+^{q_\epsilon}(x; k) = e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{e^{ik(y-x)} - e^{ik(x-y)}}{2ik} q_\epsilon(y) f_+^{q_\epsilon}(y; k) dy$$

dans l'expression

$$\frac{k}{t^{q_\epsilon}(k)} - \frac{k}{t^\sigma(k)} = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) f_+^{q_\epsilon}(x; k) dx + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) \sigma(x) f_+^{q_\epsilon}(x; k) dx.$$

La contribution $\int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) e^{ikx} = \sum_{j \neq 0} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_j(x) e^{ikx} e^{2\pi i j x / \epsilon} = \mathcal{O}(\epsilon^3)$.

Par intégration par parties, on obtient pour la seconde contribution

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) \int_x^\infty \frac{e^{ik(y-x)} - e^{ik(x-y)}}{2ik} q_\epsilon(y) f_+^{q_\epsilon}(y; k) dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) \sum_{j \neq 0} \frac{\epsilon^2}{(2\pi i j)^2} q_j(x) e^{2\pi i j x / \epsilon} f_+^{q_\epsilon}(y; k) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \sum_{j \neq 0} \frac{\epsilon^2}{(2\pi i j)^2} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_{-j}(x) q_j(x) f_+^{q_\epsilon}(y; k) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

que l'on compense par le choix $\sigma(x) = -\sum_{j \neq 0} \frac{\epsilon^2}{(2\pi j)^2} |q_j(x)|^2$.

Esquisse de preuve

On utilise l'identité

$$f_+^{q_\epsilon}(x; k) = e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{e^{ik(y-x)} - e^{ik(x-y)}}{2ik} q_\epsilon(y) f_+^{q_\epsilon}(y; k) dy$$

dans l'expression

$$\frac{k}{t^{q_\epsilon}(k)} - \frac{k}{t^\sigma(k)} = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) f_+^{q_\epsilon}(x; k) dx + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) \sigma(x) f_+^{q_\epsilon}(x; k) dx.$$

La contribution $\int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) e^{ikx} = \sum_{j \neq 0} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_j(x) e^{ikx} e^{2\pi i j x / \epsilon} = \mathcal{O}(\epsilon^3)$.

Par intégration par parties, on obtient pour la seconde contribution

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) \int_x^\infty \frac{e^{ik(y-x)} - e^{ik(x-y)}}{2ik} q_\epsilon(y) f_+^{q_\epsilon}(y; k) dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_\epsilon(x) \sum_{j \neq 0} \frac{\epsilon^2}{(2\pi i j)^2} q_j(x) e^{2\pi i j x / \epsilon} f_+^{q_\epsilon}(y; k) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \sum_{j \neq 0} \frac{\epsilon^2}{(2\pi i j)^2} \int_{-\infty}^\infty f_-^\sigma(x; k) q_{-j}(x) q_j(x) f_+^{q_\epsilon}(y; k) + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

que l'on compense par le choix $\sigma(x) = -\sum_{j \neq 0} \frac{\epsilon^2}{(2\pi j)^2} |q_j(x)|^2$.

[VD, I. Vukićević, M.I. Weinstein '14]

Soit $q_\epsilon = \sum_{j \neq 0} q_j(x) e^{2\pi i j x / \epsilon}$ telle que $\|q_\epsilon\| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |q_j e^{\beta(\cdot)}|_{W^{3,\infty}} < \infty$ ($\beta > 0$)

Il existe $\epsilon_0 > 0$ et K voisinage complexe compact de 0 tel que

$$\forall (\epsilon, k) \in (0, \epsilon_0) \times K, \quad \left| \frac{k}{t^{q_\epsilon}(k)} - \frac{k}{t^{\sigma_\epsilon^{\text{eff}}}(k)} \right| \leq \epsilon^3 C(K, \|q_\epsilon\|)$$

$$\text{où } \sigma_\epsilon^{\text{eff}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\epsilon^2 \Lambda_{\text{eff}}(x) = -\epsilon^2 \sum_{j \neq 0} \frac{|q_j(x)|^2}{(2\pi j)^2}.$$

Remarques

- ① La preuve fonctionne pour $q_0(x) \neq 0$;
- ② Le contrôle pour $k \in \mathbb{R}$ ne demande qu'une décroissance algébrique;
- ③ On en déduit une estimation de dispersion pour la solution de l'équation de Schrödinger (dynamique):

$$e^{-it(D_x^2 + q_\epsilon)} \Psi_0 = e^{-itE^\epsilon} \langle \Psi_0, \psi^\epsilon \rangle \psi^\epsilon + \mathcal{O} \left(\left(t^{1/2} + \epsilon^4 (\int \Lambda_{\text{eff}})^2 t^{3/2} \right)^{-1} \right).$$

Plan de l'exposé

1 Motivation

2 Preuve 1

3 Preuve 2

4 Preuve 3

5 Preuve 4

[D. I. Borisov, R. R. Gadyl'shin '08][VD, I. Vukićević, M.I. Weinstein '15]

Soit $P \in W^{4,\infty}(\mathbb{T})$ et $q_\epsilon(x)$ vérifiant $\widehat{q}_\epsilon \in L^1 \cap L^\infty$,

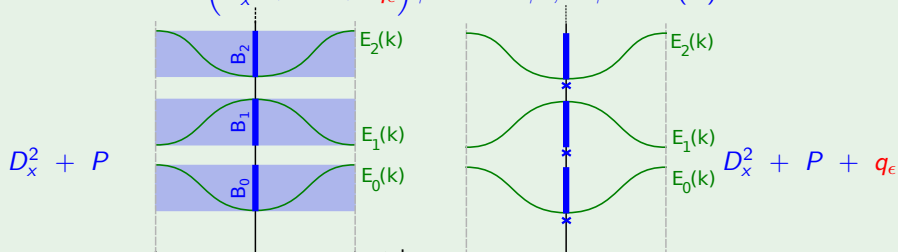
$$\int_{-1/\epsilon^{1-r}}^{1/\epsilon^{1-r}} |\widehat{q}_\epsilon(\xi)|^2 d\xi \lesssim \epsilon^N$$

avec $r \in (0, 1)$ et N grand; et il existe $B_{b_*, \text{eff}} > 0$ tel que, avec $\widehat{Q}_\epsilon(\xi) = \frac{\widehat{q}_\epsilon(\xi)}{1+4\pi^2|\xi|^2}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{P, b_*}(x; k_*)|^2 q_\epsilon(x) Q_\epsilon(x) dx = \epsilon^2 B_{b_*, \text{eff}} + \mathcal{O}(\epsilon^{2+\sigma_{\text{eff}}}).$$

Soit $E_* = E_{P, b_*}(k_*)$ l'extrémité inférieure d'une bande spectrale. Alors pour ϵ assez petit, il existe une valeur propre discrète

$$(D_x^2 + P + q_\epsilon) \psi^\epsilon = E^\epsilon \psi^\epsilon, \quad \psi^\epsilon \in L^2(\mathbb{R}).$$



[D. I. Borisov, R. R. Gadyl'shin '08][VD, I. Vukićević, M.I. Weinstein '15]

Soit $P \in W^{4,\infty}(\mathbb{T})$ et $q_\epsilon(x)$ vérifiant $\widehat{q}_\epsilon \in L^1 \cap L^\infty$,

$$\int_{-1/\epsilon^{1-r}}^{1/\epsilon^{1-r}} |\widehat{q}_\epsilon(\xi)|^2 d\xi \lesssim \epsilon^N$$

avec $r \in (0, 1)$ et N grand; et il existe $B_{b_*,\text{eff}} > 0$ tel que, avec $\widehat{Q}_\epsilon(\xi) = \frac{\widehat{q}_\epsilon(\xi)}{1+4\pi^2|\xi|^2}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_{P,b_*}(x; k_*)|^2 q_\epsilon(x) Q_\epsilon(x) dx = \epsilon^2 B_{b_*,\text{eff}} + \mathcal{O}(\epsilon^{2+\sigma_{\text{eff}}}).$$

Soit $E_* = E_{P,b_*}(k_*)$ l'extrémité inférieure d'une bande spectrale. Alors pour ϵ assez petit, il existe une valeur propre discrète

$$(D_x^2 + P + q_\epsilon)\psi^\epsilon = E^\epsilon \psi^\epsilon, \quad \psi^\epsilon \in L^2(\mathbb{R}).$$

De plus, pour $\sigma = \min(1/6, \sigma_{\text{eff}})$, on a

$$E^\epsilon - E_* = \epsilon^4 E_0 + \mathcal{O}(\epsilon^{4+\sigma}), \quad \|\psi^\epsilon - \psi_{b_*}(\cdot; k_*) e^{-\epsilon\alpha_0|x|}\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(\epsilon^\sigma)$$

où $E_0, \psi_0 \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-\alpha_0|x|)$ est la solution du problème effectif:

$$\left(\partial_k^2 E_{b_*}(k_*) D_x^2 - \delta(y) \times B_{b_*,\text{eff}} \right) \psi_0 = E_0 \psi_0.$$

Remarques

Le résultat s'applique en particulier aux situations suivantes :

- $q_\epsilon(x) = \sum_{j \neq 0} q_j(x) e^{\lambda_j x / \epsilon}$ avec $|\lambda_j| \geq c > 0, |\lambda_j - \lambda_i| \geq c > 0$.

Dans ce cas, $B_{b_\star, \text{eff}} = \sum_{j \neq 0} \frac{1}{\lambda_j^2} \int_{\mathbb{R}} |\psi_{b_\star}(x; k_\star)|^2 |q_j(x)|^2 dx$.

- $q_\epsilon(x) = q(x/\epsilon^{2/3})$ avec $\hat{q}(\xi) \lesssim |\xi|^M$.

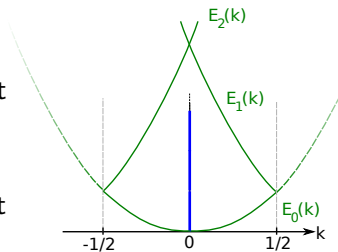
Dans ce cas, $B_{b_\star, \text{eff}} = |\psi_{b_\star}(0; k_\star)|^2 \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^x q(y) dy \right|^2 dx$.

- $P = 0$. Dans ce cas,

$\psi_0(x; k) = e^{2i\pi kx}$ et $E_0(k) = 4\pi^2 k^2$; et

$B_{b_\star, \text{eff}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{q}_\epsilon(\xi)|^2}{1 + 4\pi^2 |\xi|^2} d\xi$.

Si $q_\epsilon = q(x, x/\epsilon)$, on retrouve notre résultat précédent [VD, Vukićević, Weinstein '14].



Esquisse de preuve ($P = 0$)

On cherche à résoudre

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + q_\epsilon\right)\psi^\epsilon = E^\epsilon\psi^\epsilon, \quad \psi^\epsilon \in L^2(\mathbb{R}).$$

Après transformation de Fourier,

$$(4\pi^2|\xi|^2 - E^\epsilon)\widehat{\psi^\epsilon}(\xi) + \int_{\zeta} \widehat{q_\epsilon}(\xi - \zeta)\widehat{\psi^\epsilon}(\zeta) d\zeta = 0.$$

Procédé de Lyapunov-Schmidt

Soit χ une troncature régulière ($\chi(\xi) = 1$ sur $[-1, 1]$ et $\chi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 2$), et $r > 0$ (déterminé ultérieurement). On étudie le système couplé

$$(4\pi^2|\xi|^2 - E^\epsilon)\widehat{\psi_{\text{near}}}(\xi) + \chi(\epsilon^{-r}\xi) \int_{\zeta} \widehat{q_\epsilon}(\xi - \zeta)(\widehat{\psi_{\text{near}}} + \widehat{\psi_{\text{far}}})(\zeta) d\zeta = 0$$

$$(4\pi^2|\xi|^2 - E^\epsilon)\widehat{\psi_{\text{far}}}(\xi) + (1 - \chi(\epsilon^{-r}\xi)) \int_{\zeta} \widehat{q_\epsilon}(\xi - \zeta)(\widehat{\psi_{\text{near}}} + \widehat{\psi_{\text{far}}})(\zeta) d\zeta = 0$$

où

$$\widehat{\psi_{\text{near}}}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\epsilon^{-r}\xi)\widehat{\psi^\epsilon}(\xi), \quad \widehat{\psi_{\text{far}}}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \chi(\epsilon^{-r}\xi))\widehat{\psi^\epsilon}(\xi).$$

On va étudier chaque équation séparément.

Esquisse de preuve ($P = 0$)

Fréquences éloignées :

$$\widehat{\psi}_{\text{far}}(\xi) + \frac{1 - \chi(\epsilon^{-r}\xi)}{4\pi^2|\xi|^2 - E\epsilon} \int_{\zeta} \widehat{q}_{\epsilon}(\xi - \zeta) (\widehat{\psi}_{\text{near}} + \widehat{\psi}_{\text{far}})(\zeta) d\zeta = 0,$$

i.e.

$$\widehat{\psi}_{\text{far}} + \mathcal{T}_{\epsilon} \widehat{\psi}_{\text{far}} = -\mathcal{T}_{\epsilon} \widehat{\psi}_{\text{near}}.$$

- Si $q_{\epsilon} = \epsilon q$, alors pour tout $r \in (0, 1)$,

$$\|\mathcal{T}_{\epsilon}\|_{L^1 \rightarrow L^1} \lesssim \epsilon^{1-r} \implies \widehat{\psi}_{\text{far}} = (I + \mathcal{T}_{\epsilon})^{-1} \mathcal{T}_{\epsilon} \widehat{\psi}_{\text{near}}.$$

est bien défini, et $|\widehat{\psi}_{\text{far}}|_{L^1} \lesssim \epsilon^{1-r} |\widehat{\psi}_{\text{near}}|_{L^1}$.

- Si \widehat{q}_{ϵ} est localisé en hautes fréquences, alors

$$\|\mathcal{T}_{\epsilon} \circ \mathcal{T}_{\epsilon}\|_{L^1 \rightarrow L^1} \lesssim \epsilon^{N-2r} + \epsilon^{2-r} \quad \text{et} \quad |\mathcal{T}_{\epsilon} \widehat{\psi}_{\text{near}}|_{L^1} \lesssim (\epsilon^{N-r} + \epsilon^2) |\widehat{\psi}_{\text{near}}|_{L^1},$$

donc $\widehat{\psi}_{\text{far}}[\widehat{\psi}_{\text{near}}]$ est bien défini et $|\widehat{\psi}_{\text{far}}|_{L^1} \lesssim (\epsilon^{N-2r}, \epsilon^{2-r}) |\widehat{\psi}_{\text{near}}|_{L^1}$.

Esquisse de preuve ($P = 0$)

Fréquences proches :

$$(4\pi^2|\xi|^2 - E^\epsilon)\widehat{\psi}_{\text{near}}(\xi) + \chi(\epsilon^{-r}\xi) \int_{\zeta} \widehat{q}_\epsilon(\xi - \zeta) (\widehat{\psi}_{\text{near}} + \widehat{\psi}_{\text{far}}[\widehat{\psi}_{\text{near}}])(\zeta) d\zeta = 0.$$

- Si $q_\epsilon = \epsilon q$, alors pour tout $r \in (0, 1)$,

$$\chi(\epsilon^{-r}\xi) \int_{\zeta} \widehat{q}_\epsilon(\xi - \zeta) \widehat{\psi}_{\text{near}}(\zeta) d\zeta = \epsilon \widehat{q}(0) \chi(\epsilon^{-r}\xi) \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_{\text{near}} + \mathcal{O}(\epsilon^{1+r})$$

On obtient, finalement

$$(4\pi^2|\xi|^2 - E^\epsilon)\widehat{\psi}_{\text{near}}(\xi) + \epsilon \widehat{q}(0) \chi(\epsilon^{-r}\xi) \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_{\text{near}} = \mathcal{O}(\epsilon^{1+r} + \epsilon^{2-r}).$$

On reconnaît, après remise à l'échelle, une perturbation/régularisation de l'équation effective:

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} - E_0 + \widehat{q}(0) \times \delta(y) \right) \psi_0(y) = 0.$$

On obtient $E^\epsilon \approx \epsilon^2 E_0$, $\psi_{\text{near}} \approx \psi_0(\epsilon \cdot)$, et $\psi^\epsilon = \psi_{\text{near}} + \psi_{\text{far}}[\psi_{\text{near}}] \approx \psi_0(\epsilon \cdot)$.

Esquisse de preuve ($P = 0$)

Fréquences proches :

$$(4\pi^2|\xi|^2 - E^\epsilon)\widehat{\psi}_{\text{near}}(\xi) + \chi(\epsilon^{-r}\xi) \int_{\zeta} \widehat{q}_\epsilon(\xi - \zeta)(\widehat{\psi}_{\text{near}} + \widehat{\psi}_{\text{far}}[\widehat{\psi}_{\text{near}}])(\zeta) d\zeta = 0.$$

- Si \widehat{q}_ϵ est localisé en hautes fréquences, alors on itère l'équation :

$$(4\pi^2\xi^2 - E^\epsilon)\widehat{\psi}_{\text{near}}(\xi) = \chi(\epsilon^{-r}\xi) \left[\int_{\eta} \widehat{\psi}_{\text{near}}(\eta) \int_{\zeta} \frac{\widehat{q}_\epsilon(\xi - \zeta)\widehat{q}_\epsilon(\zeta - \eta)}{4\pi^2\zeta^2 - E^\epsilon} d\zeta d\eta + \int_{\eta} \widehat{\psi}_{\text{far}}(\eta) \int_{\zeta} \frac{\widehat{q}_\epsilon(\xi - \zeta)\widehat{q}_\epsilon(\zeta - \eta)}{4\pi^2\zeta^2 - E^\epsilon} d\zeta d\eta \right].$$

Par hypothèse, on obtient

$$(4\pi^2\xi^2 - E^\epsilon)\widehat{\psi}_{\text{near}}(\xi) = \epsilon^2 B_{b_*, \text{eff}} \chi(\epsilon^{-r}\xi) \int_{\eta} \widehat{\psi}_{\text{near}}(\eta) d\eta + \mathcal{O}(\epsilon^\sigma),$$

et on conclut comme précédemment.

Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Preuve 1
- 3 Preuve 2
- 4 Preuve 3**
- 5 Preuve 4

Dimension supérieure : [Drouot '17]

Soit $q_\epsilon(x) = q(x, x/\epsilon)$ avec $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d; \mathbb{R})$, et $\int_{\mathbb{T}^d} q(\cdot, y) dy = 0$. Alors

- Si $d = 2$, alors $D_x^2 + q_\epsilon$ possède une unique valeur propre négative,

$$E^\epsilon = -\exp\left(-\left(\frac{\epsilon^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \Lambda_{\text{eff}} + o(\epsilon^2)\right)^{-1}\right), \quad \Lambda_{\text{eff}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \neq 0} \frac{|q_j(x)|^2}{(2\pi j)^2}.$$

- Si $d \geq 3$ (impair), alors $D_x^2 + q_\epsilon$ ne possède pas de valeur propre négative.

Résonances : [Drouot '16]

Soit $q_\epsilon(x) = q(x, x/\epsilon)$ avec $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^d; \mathbb{C})$, et $\int_{\mathbb{T}^d} q(\cdot, y) dy = q_0$.

Soit λ_0 une résonance de $D_x^2 + q_0$. Alors si $d \geq 1$ (impair), et ϵ assez petit,

- $D_x^2 + q_\epsilon$ possède une unique résonance dans un voisinage de λ_0

$$\lambda^\epsilon = \lambda_0 + c_2 \epsilon^2 + c_3 \epsilon^3 + \dots + \mathcal{O}(\epsilon^N).$$

- Idem pour $D_x^2 + q_0 + \sigma_{\text{eff}}^\epsilon$ (avec les mêmes valeurs de c_2, c_3) pour

$$\sigma_{\text{eff}}^\epsilon(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\epsilon^2 \sum_{j \neq 0} \frac{|q_j(x)|^2}{(2\pi j)^2} + 2i\epsilon^3 \sum_{j \neq 0} \frac{q_{-j}(x) q_j'(x)}{(2\pi j)^3}.$$

Esquisse de preuve ($d = 1, q_0 = 0$)

On décompose pour $\Re(\lambda) > 0$

$$(D_x^2 + \lambda^2)^{-1}\varphi = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\lambda} \varphi(y) dy}_{\stackrel{\text{def}}{=} S_\lambda \varphi} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-\lambda|x-y|) - 1}{2\lambda} \varphi(y) dy}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_\lambda \varphi}.$$

Or, en posant $\rho \geq 0$ régulière à support compact telle que $\rho q_\epsilon = q_\epsilon$,

$$\begin{aligned} (D_x^2 + q_\epsilon + \lambda^2)\psi &= 0 \Leftrightarrow \rho\psi = -\rho(D_x^2 + \lambda^2)^{-1}q_\epsilon\rho\psi \\ &\Leftrightarrow \text{Det}\left(\text{Id} + \underbrace{\rho(S_\lambda + R_\lambda)q_\epsilon}_{\text{trace class}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Det}\left(\text{Id} + \underbrace{(\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon}_{\text{rank one}}\right) \times \text{Det}(\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \text{Tr}\left((\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon\right) = 0. \end{aligned}$$

En effet, $\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon$ est inversible puisque (seule différence avec [Simon '76])

$$\|(\rho R_\lambda q_\epsilon)^2\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|\rho R_\lambda \rho\|_{H^{-2} \rightarrow L^2} \|q_\epsilon\|_{H^2 \rightarrow H^{-2}} \|\rho R_\lambda \rho\|_{L^2 \rightarrow H^2} \|q_\epsilon\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

où l'on utilise $\|q_\epsilon\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(1)$ et $\|q_\epsilon\|_{H^{-2}} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$, uniformément en λ borné.

Esquisse de preuve ($d = 1, q_0 = 0$)

On décompose pour $\Re(\lambda) > 0$

$$(D_x^2 + \lambda^2)^{-1}\varphi = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\lambda} \varphi(y) dy}_{\stackrel{\text{def}}{=} S_\lambda \varphi} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-\lambda|x-y|) - 1}{2\lambda} \varphi(y) dy}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_\lambda \varphi}.$$

Or, en posant $\rho \geq 0$ régulière à support compact telle que $\rho q_\epsilon = q_\epsilon$,

$$\begin{aligned} (D_x^2 + q_\epsilon + \lambda^2)\psi &= 0 \Leftrightarrow \rho\psi = -\rho(D_x^2 + \lambda^2)^{-1}q_\epsilon\rho\psi \\ &\Leftrightarrow \text{Det}\left(\text{Id} + \underbrace{\rho(S_\lambda + R_\lambda)q_\epsilon}_{\text{trace class}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Det}\left(\text{Id} + \underbrace{(\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon}_{\text{rank one}}\right) \times \text{Det}(\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \text{Tr}\left((\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon\right) = 0. \end{aligned}$$

En effet, $\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon$ est inversible puisque (seule différence avec [Simon '76])

$$\|(\rho R_\lambda q_\epsilon)^2\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|\rho R_\lambda \rho\|_{H^{-2} \rightarrow L^2} \|q_\epsilon\|_{H^2 \rightarrow H^{-2}} \|\rho R_\lambda \rho\|_{L^2 \rightarrow H^2} \|q_\epsilon\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

où l'on utilise $\|q_\epsilon\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(1)$ et $\|q_\epsilon\|_{H^{-2}} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$, uniformément en λ borné.

Esquisse de preuve ($d = 1, q_0 = 0$)

On décompose pour $\Re(\lambda) > 0$

$$(D_x^2 + \lambda^2)^{-1}\varphi = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\lambda} \varphi(y) dy}_{\stackrel{\text{def}}{=} S_\lambda \varphi} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(-\lambda|x-y|) - 1}{2\lambda} \varphi(y) dy}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_\lambda \varphi}.$$

Or, en posant $\rho \geq 0$ régulière à support compact telle que $\rho q_\epsilon = q_\epsilon$,

$$\begin{aligned} (D_x^2 + q_\epsilon + \lambda^2)\psi = 0 &\Leftrightarrow \rho\psi = -\rho(D_x^2 + \lambda^2)^{-1}q_\epsilon\rho\psi \\ &\Leftrightarrow \text{Det}\left(\text{Id} + \underbrace{\rho(S_\lambda + R_\lambda)q_\epsilon}_{\text{trace class}}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Det}\left(\text{Id} + \underbrace{(\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon}_{\text{rank one}}\right) \times \text{Det}(\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \text{Tr}\left((\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon\right) = 0. \end{aligned}$$

En effet, $\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon$ est inversible puisque (seule différence avec [Simon '76])

$$\|(\rho R_\lambda q_\epsilon)^2\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|\rho R_\lambda \rho\|_{H^{-2} \rightarrow L^2} \|q_\epsilon\|_{H^2 \rightarrow H^{-2}} \|\rho R_\lambda \rho\|_{L^2 \rightarrow H^2} \|q_\epsilon\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

où l'on utilise $\|q_\epsilon\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(1)$ et $\|q_\epsilon\|_{H^{-2}} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$, uniformément en λ borné.

Esquisse de preuve ($d = 1, q_0 = 0$)

$$(D_x^2 + q_\epsilon + \lambda^2)\psi = 0 \Leftrightarrow 1 + \text{Tr}\left((\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon\right) = 0.$$

Il reste à montrer (plus un petit argument pour l'unicité de la solution)

$$\text{Tr}\left((\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon\right) = \frac{1}{2} \lambda^{-1} \left(-\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \Lambda_{\text{eff}} + o(\epsilon^2) \right).$$

Par holomorphie (en λ), il suffit de montrer le résultat pour $\lambda \in [1, 2]$. On rappelle

$$S_\lambda q_\epsilon \varphi = \frac{1}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}} q_\epsilon(y) \varphi(y) dy, \quad (\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} = \text{Id} - \rho R_\lambda q_\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Le terme dominant vient de

$$\text{Tr}(-\rho R_\lambda q_\epsilon \rho S_\lambda q_\epsilon) = -\frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}} q_\epsilon(y) (\rho R_\lambda q_\epsilon \rho)(y) dy,$$

que l'on estime par décomposition en fréquences. Il suit

$$\lambda^\epsilon \sim \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \Lambda_{\text{eff}} \quad \text{et} \quad E^\epsilon = -(\lambda^\epsilon)^2.$$

Esquisse de preuve ($d = 1, q_0 = 0$)

$$(D_x^2 + q_\epsilon + \lambda^2)\psi = 0 \Leftrightarrow 1 + \text{Tr}\left((\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon\right) = 0.$$

Il reste à montrer (plus un petit argument pour l'unicité de la solution)

$$\text{Tr}\left((\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} \rho S_\lambda q_\epsilon\right) = \frac{1}{2} \lambda^{-1} \left(-\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \Lambda_{\text{eff}} + o(\epsilon^2) \right).$$

Par holomorphie (en λ), il suffit de montrer le résultat pour $\lambda \in [1, 2]$. On rappelle

$$S_\lambda q_\epsilon \varphi = \frac{1}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}} q_\epsilon(y) \varphi(y) dy, \quad (\text{Id} + \rho R_\lambda q_\epsilon)^{-1} = \text{Id} - \rho R_\lambda q_\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Le terme dominant vient de

$$\text{Tr}(-\rho R_\lambda q_\epsilon \rho S_\lambda q_\epsilon) = -\frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}} q_\epsilon(y) (\rho R_\lambda q_\epsilon \rho)(y) dy,$$

que l'on estime par décomposition en fréquences. Il suit

$$\lambda^\epsilon \sim \frac{\epsilon^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \Lambda_{\text{eff}} \quad \text{et} \quad E^\epsilon = -(\lambda^\epsilon)^2.$$

Plan de l'exposé

- 1 Motivation
- 2 Preuve 1
- 3 Preuve 2
- 4 Preuve 3
- 5 Preuve 4**

Problème multi-échelle

On pose $q_{\epsilon,\alpha} = q(\epsilon^\alpha x, x/\epsilon)$ et on cherche

$$\left(D_x^2 + q_{\epsilon,\alpha}\right)\psi^{\epsilon,\alpha} = E^{\epsilon,\alpha}\psi^{\epsilon,\alpha}, \quad E^{\epsilon,\alpha} < 0, \quad \psi^{\epsilon,\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$$

Prédiction du potentiel effectif :

$$\left(D_x^2 - \epsilon^2 \Lambda_{\text{eff}}(\epsilon^\alpha \cdot)\right)\varphi^{\epsilon,\alpha} = E^{\epsilon,\alpha}\varphi^{\epsilon,\alpha}, \quad E^{\epsilon,\alpha} < 0, \quad \varphi^{\epsilon,\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$$

i.e. après remise à l'échelle

$$\left(D_x^2 - \epsilon^{2-2\alpha} \Lambda_{\text{eff}}\right)\varphi^{\epsilon,\alpha} = \epsilon^{-2\alpha} E^{\epsilon,\alpha} \varphi^{\epsilon,\alpha}, \quad E^{\epsilon,\alpha} < 0, \quad \varphi^{\epsilon,\alpha} \in L^2(\mathbb{R}).$$

- Si $\alpha < 1$, unique valeur propre de taille $\sim \epsilon^{4-2\alpha}$;
- Si $\alpha = 1$, nombre fini de valeurs propres de taille $\sim \epsilon^2$;
- Si $\alpha > 1$, nombre croissant de valeurs propres de taille $\sim \epsilon^2 + \epsilon^{1+\alpha}$.

Problème multi-échelle

On pose $q_{\epsilon,\alpha} = q(\epsilon^\alpha x, x/\epsilon)$ et on cherche

$$\left(D_x^2 + q_{\epsilon,\alpha}\right)\psi^{\epsilon,\alpha} = E^{\epsilon,\alpha}\psi^{\epsilon,\alpha}, \quad E^{\epsilon,\alpha} < 0, \quad \psi^{\epsilon,\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$$

Prédiction du potentiel effectif :

$$\left(D_x^2 - \epsilon^2 \Lambda_{\text{eff}}(\epsilon^\alpha \cdot)\right)\varphi^{\epsilon,\alpha} = E^{\epsilon,\alpha}\varphi^{\epsilon,\alpha}, \quad E^{\epsilon,\alpha} < 0, \quad \varphi^{\epsilon,\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$$

i.e. après remise à l'échelle

$$\left(D_x^2 - \epsilon^{2-2\alpha} \Lambda_{\text{eff}}\right)\varphi^{\epsilon,\alpha} = \epsilon^{-2\alpha} E^{\epsilon,\alpha} \varphi^{\epsilon,\alpha}, \quad E^{\epsilon,\alpha} < 0, \quad \varphi^{\epsilon,\alpha} \in L^2(\mathbb{R}).$$

- Si $\alpha < 1$, unique valeur propre de taille $\sim \epsilon^{4-2\alpha}$;
- Si $\alpha = 1$, nombre fini de valeurs propres de taille $\sim \epsilon^2$;
- Si $\alpha > 1$, nombre croissant de valeurs propres de taille $\sim \epsilon^2 + \epsilon^{1+\alpha}$.

Problème multi-échelle

On pose $q_{\epsilon,\alpha} = q(\epsilon^\alpha x, x/\epsilon)$ et on cherche

$$\left(D_x^2 + q_{\epsilon,\alpha}\right)\psi^{\epsilon,\alpha} = E^{\epsilon,\alpha}\psi^{\epsilon,\alpha}, \quad E^{\epsilon,\alpha} < 0, \quad \psi^{\epsilon,\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$$

Prédiction du potentiel effectif :

$$\left(D_x^2 - \epsilon^2 \Lambda_{\text{eff}}(\epsilon^\alpha \cdot)\right)\varphi^{\epsilon,\alpha} = E^{\epsilon,\alpha}\varphi^{\epsilon,\alpha}, \quad E^{\epsilon,\alpha} < 0, \quad \varphi^{\epsilon,\alpha} \in L^2(\mathbb{R})$$

i.e. après remise à l'échelle

$$\left(D_{\tilde{x}}^2 - \epsilon^{2-2\alpha} \Lambda_{\text{eff}}\right)\varphi^{\epsilon,\alpha} = \epsilon^{-2\alpha} E^{\epsilon,\alpha} \varphi^{\epsilon,\alpha}, \quad E^{\epsilon,\alpha} < 0, \quad \varphi^{\epsilon,\alpha} \in L^2(\mathbb{R}).$$

- Si $\alpha < 1$, unique valeur propre de taille $\sim \epsilon^{4-2\alpha}$;
- Si $\alpha = 1$, nombre fini de valeurs propres de taille $\sim \epsilon^2$;
- Si $\alpha > 1$, nombre croissant de valeurs propres de taille $\sim \epsilon^2 + \epsilon^{1+\alpha}$.

Stratégie

$$\left(D_x^2 + q_{\epsilon,\alpha}\right)\psi = E\psi, \quad E < 0, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}).$$

- Conjugaison : Soit $\psi = e^{\phi}\varphi(f_{\phi}(x))$ avec $f_{\phi}(x) = \int_0^x e^{-2\phi(y)}dy$. Alors

$$\left(D_x^2 + V_{\phi}\right)\varphi = 0, \quad V_{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} e^{4\phi}(q_{\epsilon,\alpha} - \phi'' - |\phi'|^2 - E) \circ (f_{\phi}^{-1}(x)).$$

- Choix de ϕ :

$$\begin{aligned} \phi(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \neq 0} \left(-\epsilon^2 \frac{q_j(\epsilon^{\alpha}x)}{(2\pi j)^2} + \epsilon^{3+\alpha} \frac{2q'_j(\epsilon^{\alpha}x)}{(2\pi j)^3} + \dots \right) e^{2\pi i j x/\epsilon} \\ \Rightarrow V_{\phi}(x) &= -\epsilon^2 \Lambda_{\text{eff}}(\epsilon^{\alpha}x) + \epsilon^{3+\alpha} \Lambda_{\text{eff},2}(\epsilon^{\alpha}x) - E + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned}$$

- Comparaison des formes et principe du min-max
 \rightsquigarrow encadrement des valeurs propres.

Construction de quasi-modes et théorème spectral

\rightsquigarrow approximation des fonctions propres.

Stratégie

$$\left(D_x^2 + q_{\epsilon,\alpha}\right)\psi = E\psi, \quad E < 0, \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}).$$

- Conjugaison : Soit $\psi = e^\phi \varphi(f_\phi(x))$ avec $f_\phi(x) = \int_0^x e^{-2\phi(y)} dy$. Alors

$$\left(D_x^2 + V_\phi\right)\varphi = 0, \quad V_\phi \stackrel{\text{def}}{=} e^{4\phi}(q_{\epsilon,\alpha} - \phi'' - |\phi'|^2 - E) \circ (f_\phi^{-1}(x)).$$

- Choix de ϕ :

$$\phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \neq 0} \left(-\epsilon^2 \frac{q_j(\epsilon^\alpha x)}{(2\pi j)^2} + \epsilon^{3+\alpha} \frac{2q'_j(\epsilon^\alpha x)}{(2\pi j)^3} + \dots \right) e^{2\pi i j x / \epsilon}$$

$$\Rightarrow V_\phi(x) = -\epsilon^2 \Lambda_{\text{eff}}(\epsilon^\alpha x) + \epsilon^{3+\alpha} \Lambda_{\text{eff},2}(\epsilon^\alpha x) - E + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

- Comparaison des formes et principe du min-max

↪ encadrement des valeurs propres.

Construction de quasi-modes et théorème spectral

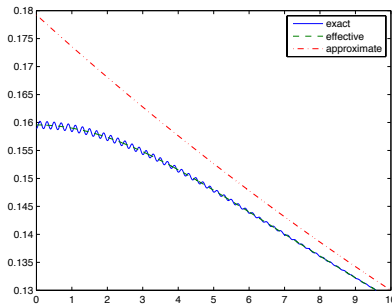
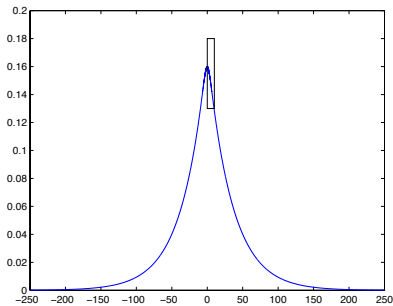
↪ approximation des fonctions propres.

Résultat : cas $\alpha < 1$

[VD, N. Raymond]

Si $\alpha \in (0, 1)$ et $(1 + |\cdot|)\Lambda_{\text{eff}} \in L^1$, alors pour ϵ suffisamment petit, $D_x^2 + q_{\epsilon, \alpha}$ possède une unique valeur propre négative $\lambda_{\epsilon, \alpha} \sim -\left(\frac{\epsilon^{2-\alpha}}{2} \int \Lambda_{\text{eff}}\right)^2$
 Si $\alpha \in (1/2, 1)$, la fonction propre renormalisée correspondante vérifie

$$\varphi_{\epsilon, \alpha} \sim L^2 \left(-\frac{\epsilon^{2-\alpha}}{2} \int \Lambda_{\text{eff}} \right)^{1/2} \exp \left(|x| \frac{\epsilon^{2-\alpha}}{2} \int \Lambda_{\text{eff}} \right).$$



Résultat : cas $\alpha > 1$

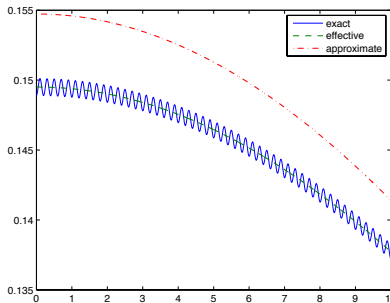
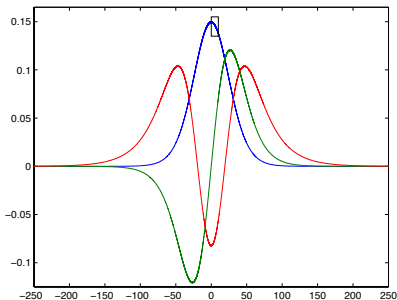
Si $\alpha \in (1, 3)$ et Λ_{eff} possède un unique minimum non-dégénéré en $x = 0$. Alors pour ϵ assez petit, $D_x^2 + q_{\epsilon, \alpha}$ possède au moins N valeurs propres distinctes

$$\lambda_{n, \epsilon, \alpha} = \epsilon^2 \Lambda_{\text{eff}}(0) + \epsilon^{1+\alpha} (2n-1) \sqrt{\frac{\Lambda_{\text{eff}}''(0)}{2}} + o(\epsilon^{1+\alpha}).$$

Les fonctions propres renormalisées correspondantes vérifient

$$\varphi_{n, \epsilon, \alpha} \sim_{L^2} \epsilon^{\frac{1+\alpha}{4}} H_n(\epsilon^{\frac{1+\alpha}{2}} x).$$

où H_n vérifie $(D_x^2 + \frac{\Lambda_{\text{eff}}''(0)}{2} x^2) H_n = (2n-1) \sqrt{\frac{\Lambda_{\text{eff}}''(0)}{2}} H_n$.



Conclusions et perspectives

Conclusions

- Le potentiel effectif permet de décrire efficacement les premiers ordres de développements asymptotiques pour un potentiel oscillant ou désordonné.
- Comme pour le modèle d'Anderson, désordre \Rightarrow localisation.
- Pas de développement à tout ordre "simple" (*cf* homogénéisation périodique)
- Pas de stratégie robuste.

Perspectives

- Lien avec homogénéisation et opérateurs plus généraux

$$D_x^2 + q_\epsilon - \lambda = \omega_\epsilon^{-1} D_x \omega_\epsilon^2 D_x \omega_\epsilon^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_\epsilon \quad \text{où} \quad D_x^2 \omega_\epsilon + q_\epsilon \omega_\epsilon = \lambda \omega_\epsilon.$$

[Suslina et al.] $\omega^{-1} = f(x/\epsilon)$ et $\omega^2 = g(x/\epsilon) \rightsquigarrow$ opérateur effectif

$$\mathcal{A}_0 = f_0 D_x g_0 D_x f_0, \quad g_0 = \langle g^{-1} \rangle^{-1}, \quad f_0 = \langle f_0^{-2} \rangle^{-1/2}.$$

- Problèmes dynamiques:

$$\|e^{-it\mathcal{A}_\epsilon} - e^{-it\mathcal{A}_0}\|_{H^s \rightarrow L^2} + \|\cos(t\mathcal{A}_\epsilon^{1/2}) - \cos(t\mathcal{A}_0^{1/2})\|_{H^s \rightarrow L^2} \lesssim \epsilon(1 + |t|).$$

- Saint-Venant avec fond désordonné, water-waves avec fond désordonné...

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Le potentiel effectif permet de décrire efficacement les premiers ordres de développements asymptotiques pour un potentiel oscillant ou désordonné.
- Comme pour le modèle d'Anderson, désordre \Rightarrow localisation.
- Pas de développement à tout ordre "simple" (*cf* homogénéisation périodique)
- Pas de stratégie robuste.

Perspectives

- Lien avec homogénéisation et opérateurs plus généraux

$$D_x^2 + q_\epsilon - \lambda = \omega_\epsilon^{-1} D_x \omega_\epsilon^2 D_x \omega_\epsilon^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_\epsilon \quad \text{où} \quad D_x^2 \omega_\epsilon + q_\epsilon \omega_\epsilon = \lambda \omega_\epsilon.$$

[Suslina et al.] $\omega^{-1} = f(x/\epsilon)$ et $\omega^2 = g(x/\epsilon) \rightsquigarrow$ opérateur effectif

$$\mathcal{A}_0 = f_0 D_x g_0 D_x f_0, \quad g_0 = \langle g^{-1} \rangle^{-1}, \quad f_0 = \langle f_0^{-2} \rangle^{-1/2}.$$

- Problèmes dynamiques:

$$\|e^{-it\mathcal{A}_\epsilon} - e^{-it\mathcal{A}_0}\|_{H^s \rightarrow L^2} + \|\cos(t\mathcal{A}_\epsilon^{1/2}) - \cos(t\mathcal{A}_0^{1/2})\|_{H^s \rightarrow L^2} \lesssim \epsilon(1 + |t|).$$

- Saint-Venant avec fond désordonné, water-waves avec fond désordonné...

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Le potentiel effectif permet de décrire efficacement les premiers ordres de développements asymptotiques pour un potentiel oscillant ou désordonné.
- Comme pour le modèle d'Anderson, désordre \Rightarrow localisation.
- Pas de développement à tout ordre "simple" (*cf* homogénéisation périodique)
- Pas de stratégie robuste.

Perspectives

- Lien avec homogénéisation et opérateurs plus généraux

$$D_x^2 + q_\epsilon - \lambda = \omega_\epsilon^{-1} D_x \omega_\epsilon^2 D_x \omega_\epsilon^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_\epsilon \quad \text{où} \quad D_x^2 \omega_\epsilon + q_\epsilon \omega_\epsilon = \lambda \omega_\epsilon.$$

[Suslina et al.] $\omega^{-1} = f(x/\epsilon)$ et $\omega^2 = g(x/\epsilon) \rightsquigarrow$ opérateur effectif

$$\mathcal{A}_0 = f_0 D_x g_0 D_x f_0, \quad g_0 = \langle g^{-1} \rangle^{-1}, \quad f_0 = \langle f_0^{-2} \rangle^{-1/2}.$$

- Problèmes dynamiques:

$$\|e^{-it\mathcal{A}_\epsilon} - e^{-it\mathcal{A}_0}\|_{H^s \rightarrow L^2} + \|\cos(t\mathcal{A}_\epsilon^{1/2}) - \cos(t\mathcal{A}_0^{1/2})\|_{H^s \rightarrow L^2} \lesssim \epsilon(1 + |t|).$$

- Saint-Venant avec fond désordonné, water-waves avec fond désordonné...

Merci de votre attention !