L'objectif de ces notes est d'illustrer l'utilisation de résultats d'analyse fonctionnelle, produits de convolution, séries et transformée de Fourier et (dans une moindre mesure) distributions pour l'étude d'équations aux dérivées partielles. Il s'agit d'exemples : de nombreux choix différents peuvent être faits, avec des conséquences sur la simplicité, la lisibilité, et la généralité des preuves et des résultats.

# 1 L'équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur

$$\partial_t u = \Delta u \tag{1}$$

dans un cadre $(2\pi)$-périodique par rapport à la variable d'espace (voir commentaire ultérieur pour le cadre non-périodique) : $u : \mathbb{R}^+ \times (2\pi\mathbb{T})^d \to \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{N}^\star$), et $\Delta u = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 u$.

**Théorème 1.** *Pour tout $p \in [1, +\infty[$ et pour tout $f \in L^p((2\pi\mathbb{T})^d)$, il existe un unique fonction $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; L^p((2\pi\mathbb{T})^d) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+_\star(2\pi\mathbb{T})^d)$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^+_\star(2\pi\mathbb{T})^d$ et $u(0,\cdot) = f$. De plus, on a $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+_\star \times (2\pi\mathbb{T})^d)$ et l'application $S : f \in L^p((2\pi\mathbb{T})^d) \to u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; L^p((2\pi\mathbb{T})^d)$ est linéaire continue.*

*Démonstration. Analyse.* Si une telle fonction $u$ existe, on montre que $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$,

$$\widehat{u}_{\boldsymbol{k}} : t \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{(2\pi\mathbb{T})^d} u(t, \boldsymbol{x}) e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, continument dérivable sur $\mathbb{R}^+_\star$, et de plus

$$\widehat{u}_{\boldsymbol{k}}(0) = \widehat{f}_{\boldsymbol{k}}, \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad \widehat{u}_{\boldsymbol{k}}'(t) = -|\boldsymbol{k}|^2 \widehat{u}_{\boldsymbol{k}}(t).$$

Il suit

$$\forall t > 0, \quad (\widehat{u}_{\boldsymbol{k}}(t))_{\boldsymbol{k}} = (\widehat{f}_{\boldsymbol{k}} e^{-|\boldsymbol{k}|^2 t})_{\boldsymbol{k}} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d),$$

et donc

$$\forall t > 0, \quad u(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}_{\boldsymbol{k}} e^{-|\boldsymbol{k}|^2 t} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{(2\pi\mathbb{T})^d} f(\boldsymbol{y}) \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} e^{-|\boldsymbol{k}|^2 t} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = K_t \star f$$

où l'on définit pour tout $t > 0$ le *noyau de la chaleur*, $K_t$, par

$$K_t : \boldsymbol{x} \mapsto \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} e^{-|\boldsymbol{k}|^2 t}.$$

*Synthèse.* Montrons que $u = K_t \star f$ est bien solution de notre problème. Puisque $K_t \in \mathcal{C}^\infty((2\pi\mathbb{T})^d)$, on a pour tout $t > 0$, $K_t \star f \in \mathcal{C}^\infty((2\pi\mathbb{T})^d)$. De plus, on vérifie que $u$ est continument dérivable sur $\mathbb{R}^+_\star$ et $\partial_t u = (\partial_t K_t) \star f = (\Delta K_t) \star f = \Delta u$ sur $\mathbb{R}^+_\star \times (2\pi\mathbb{T})^d$. De la même manière, on a immédiatement $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+_\star \times (2\pi\mathbb{T})^d)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il reste à montrer que

$$\forall t > 0, \big\|K_t \star f\big\|_{L^p((2\pi\mathbb{T})^d)} \le \big\|f\big\|_{L^p((2\pi\mathbb{T})^d)}, \quad \text{et} \quad \big\|K_t \star f - f\big\|_{L^p((2\pi\mathbb{T})^d)} \to 0 \quad (t \to 0)$$

Admettons pour le moment que $\forall (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+_\star \times (2\pi\mathbb{T})^d$, $K_t(\boldsymbol{x}) \ge 0$. Il suit que

$$\forall t > 0, \quad \big\|K_t\big\|_{L^1((2\pi\mathbb{T})^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{(2\pi\mathbb{T})^d} K_t(\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1,$$

et le premier résultat est une conséquence de l'inégalité de Young pour la convolution (elle-même un corollaire de l'inégalité de Jensen). Le second résultat est vrai si $(\widehat{f}_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}} \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$, car on a alors

$u(t, \boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x})$ pour tout $\boldsymbol{x} \in (2\pi\mathbb{T})^d$ (la série de Fourier étant alors normalement convergente), et par application du théorème de convergence dominée. Le cas général se déduit par densité, puisque les polynômes trigonométriques forment un ensemble dense dans $L^p((2\pi\mathbb{T})^d)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Il reste à montrer la positivité du noyau de la chaleur, qui est équivalente au *principe du maximum* : si $g \geq 0$, alors pour tout $t > 0$, $K_t \star g \geq 0$. Il est suffisant de montrer se résultat pour $g$ un polynôme trigonométrique. Raisonnant par contradiction, supposons qu'il existe $t_0 > 0$ et $\boldsymbol{x}_0 \in (2\pi\mathbb{T})^d$ tels que $(K_{t_0} \star g)(\boldsymbol{x}_0) < 0$. Prenons $\beta < 0$ et définissons $v : (t, \boldsymbol{x}) \mapsto e^{\beta t}(K_t \star g)(\boldsymbol{x})$. Puisque $v$ possède un minimum global négatif $(t_1, \boldsymbol{x}_1)$ sur $[0, t^\star] \times (2\pi\mathbb{T})^d$, avec $t_1 \in ]0, t_0]$, on a

$$0 \leq \Delta v(t_1, \boldsymbol{x}_1) = e^{\beta t_1}(\Delta K_{t_1} \star g)(\boldsymbol{x}_1), \quad 0 \geq \partial_t v(t_1, \boldsymbol{x}_1) = e^{\beta t_1}\big((\partial_t K_{t_1} \star g)(\boldsymbol{x}_1) + \beta(K_{t_1} \star g)(\boldsymbol{x}_1)\big),$$

on observe une contradiction. On peut appliquer le résultat obtenu avec le noyau de Féjer multidimensionnel (qui est le produit des noyaux unidimensionnels), noté $F_{N,d}$. On a, pour tout $t > 0$, $K_t \star F_{N,d} \geq 0$ et pour tout $\boldsymbol{x} \in (2\pi\mathbb{T})^d$, $\lim_{N\to\infty}(K_t \star F_{N,d})(\boldsymbol{x}) = K_t(\boldsymbol{x})$. On a donc $K_t(\boldsymbol{x}) \geq 0$, ce qui conclue la preuve. $\square$

**Remarque 2.** *Le résultat n'est pas vrai pour $p = +\infty$ (sinon on pourrait approcher uniformément une fonction discontinue par une suite de fonctions régulières). Elle est vraie en revanche si l'on suppose de plus que $f \in \mathcal{C}^0((2\pi\mathbb{T})^d)$. Le point essentiel est la densité des fonctions trigonométriques dans l'espace utilisé.*

**Remarque 3.** *On a utilisé très fortement les propriétés régularisantes du noyau de la chaleur : étant donné $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, les coefficients de Fourier de la solution sont sommables pour tout $t > 0$, ce qui permet de reconstruire la solution à partir de ses coefficients de Fourier. La situation est un peu plus délicate dans le cadre non-périodique, c'est à dire si l'on se donne $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ : il y a des enjeux à la fois de régularité et de décroissance sur la solution et sa transformée de Fourier, et aucune inclusion $L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$ n'est valide. Une solution consiste à travailler sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, où la transformer de Fourier réalise une isométrie (ce sera le choix de la section suivante). On peut aussi travailler (par dualité) sur les distributions tempérées, en exploitant le fait pour tout $t > 0$, $\boldsymbol{k} \mapsto e^{-|\boldsymbol{k}|^2 t}$ appartient à la classe de Schwartz des fonctions régulières à décroissance rapide. Il est aussi possible de travailler principalement avec le produit de convolution, en utilisant le fait que le noyau de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$ est explicite*[1] *:*

$$\forall (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_\star^+ \times \mathbb{R}^d, \quad \widetilde{K}_t(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} e^{-|\boldsymbol{\xi}|^2 t}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|\boldsymbol{x}|^2/(4t)}.$$

**Remarque 4.** *L'application $S_t : f \in L^p((2\pi\mathbb{T})^d) \mapsto K_t \star f \in L^p((2\pi\mathbb{T})^d)$ possède une structure de semi-groupe continu :*

— $S_0 = \mathrm{Id}$,
— $\forall s, t \geq 0, \quad S_s S_t = S_{s+t}$,
— $\forall f \in L^p((2\pi\mathbb{T})^d), \quad \big\|S_t f - f\big\|_{L^p((2\pi\mathbb{T})^d)} \to 0$ *lorsque* $t \searrow 0$.

*L'application n'est* pas *définie pour $t < 0$, car dans ce cas on aurait pour tout $f \in L^p((2\pi\mathbb{T})^d)$, $S_t f \in L^p((2\pi\mathbb{T})^d)$ (pour $t < 0$), et donc $f = S_{-t}(S_t f) \in \mathcal{C}^\infty((2\pi\mathbb{T})^d)$, ce qui est absurde.*

**Remarque 5.** *On a construit $S_t = \exp(t\Delta)$ en exploitant que les fonctions trigonométriques, $\boldsymbol{e_k} : \boldsymbol{x} \in (2\pi\mathbb{T})^d \mapsto e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ pour $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$, forment une base Hilbertienne de $L^2((2\pi\mathbb{T})^d)$ de fonctions propres de l'opérateur $\Delta$ (associées aux valeurs propres $-|\boldsymbol{k}|^2$), et en écrivant*

$$S_t f = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} e^{-t|\boldsymbol{k}|^2} \langle \boldsymbol{e_k}, \cdot\rangle_{L^2((2\pi\mathbb{T})^d)} \boldsymbol{e_k}.$$

*La section suivante développe plus généralement cette stratégie.*

1. pour montrer cette formule, on peut se ramener au cas $d = 1$ par tensorisation, à $t = 1$ par changement d'échelle, puis résoudre l'équation différentielle $y' = \frac{-1}{2}xy$, avec la donnée initiale fournie par l'intégrale de Gauss.

# 2 Équations d'évolution

On considère ici les équations d'évolution linéaires à coefficients constants de la forme

$$\partial_t \boldsymbol{u} = P(\nabla)\boldsymbol{u} \tag{2}$$

où $\boldsymbol{u} : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}^n$ (avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $d, n \in \mathbb{N}^\star$), $\nabla := (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_d})$ et $P \in M_n(\mathbb{K}[X_1, \dots, X_d])$ (une matrice de taille $n \times n$ dont les coefficients sont des polynômes).

Cette classe d'équations comprend l'équation de la chaleur, (1) ; l'équation de Schrödinger, $\mathrm{i}\partial_t \psi = \Delta\psi$ ; l'équation de de transport, $\partial_t \boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \cdot \nabla \boldsymbol{u}$ avec $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ ; l'équation des ondes $\partial_t^2 u = \Delta u$ (quand on écrit l'équation sur le vecteur $\boldsymbol{v} := (\partial_t u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_d} u)$), *etc.*

Dans la suite, on utilisera la transformée de Fourier *selon la variable d'espace*, avec une convention pour laquelle la transformée de Fourier est une isométrie : pour tout $f \in \mathcal{C}^0(I; L^1(\mathbb{R}^d))$,

$$\forall t \in I,\ \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f}(t, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(t, \boldsymbol{x}) e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{3}$$

Toutes les opérations sur des fonctions scalaires sont naturellement étendues aux fonctions vectorielles ou matricielles, composante par composante.

Le lemme suivant va nous permettre de réécrire l'équation (2) comme un système d'équations différentielles ordinaires (d'ordre 1, à coefficients constants) dans l'espace de Fourier.

**Lemme 6.** *Si* $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}^0(I; L^2(\mathbb{R}^d)^n)$*, alors*

*i.* $\widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{C}^0(I; L^2(\mathbb{R}^d)^n)$,

*ii.* $\widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}}(t, \cdot) = P(\mathrm{i}\,\cdot)\widehat{\boldsymbol{u}}(t, \cdot)$ *(au sens des distributions sur* $I \times \mathbb{R}^d$*,* $I$ *ouvert),*

*iii.* $\widehat{\partial_t \boldsymbol{u}} = \partial_t \widehat{\boldsymbol{u}}$ *(au sens des distributions sur* $I \times \mathbb{R}^d$*,* $I$ *ouvert).*

*Démonstration.* Le premier point est une conséquence directe de l'identité de Parseval :

$$\forall t, t' \in I, \quad \big\|\widehat{\boldsymbol{u}}(t', \cdot) - \widehat{\boldsymbol{u}}(t, \cdot)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^n} = \big\|\boldsymbol{u}(t', \cdot) - \boldsymbol{u}(t, \cdot)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^n}.$$

Pour le second point, on va montrer un résultat plus fort :

$$\forall t \in I, \quad \widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}}(t, \cdot) = P(\mathrm{i}\,\cdot)\widehat{\boldsymbol{u}}(t, \cdot) \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^n$ est l'espace de Schwartz des fonctions régulières à décroissance rapide, et donc $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ les distributions tempérées. Supposons d'abord que $\boldsymbol{u}(t, \cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^n$. Alors $P(\nabla)\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^n$, et

$$\begin{aligned}\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}}(t, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} P(\nabla)\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = P(\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi})\widehat{\boldsymbol{u}}(t, \boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

où la seconde identité est obtenue à travers des intégrations par parties. Le cas général peut être obtenu par densité (on pourrait également raisonner par dualité comme au dessous) : soit $(\boldsymbol{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u}_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^n$ et $\big\|\boldsymbol{u}_n - \boldsymbol{u}(t, \cdot)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. On a

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \langle \widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} = \langle P(\nabla)\boldsymbol{u}, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} = \langle \boldsymbol{u}, P^\star(-\nabla)\widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{u} \cdot \big(P^\star(-\nabla)\widehat{\varphi}\big)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Donc $\widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}_n} \to \widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)^n$ lorsque $n \to \infty$, et de même $P(\mathrm{i}\,\cdot)\widehat{\boldsymbol{u}_n} \to P(\mathrm{i}\,\cdot)\widehat{\boldsymbol{u}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)^n$. L'identité $\widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}} = P(\mathrm{i}\,\cdot)\widehat{\boldsymbol{u}}$ se déduit donc à la limite $n \to \infty$. On en déduit

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I \times \mathbb{R}^d), \quad \langle \widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(I \times \mathbb{R}^d)} &= \int_I \langle \widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}}(t, \cdot), \varphi(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_I \langle P(\mathrm{i}\,\cdot)\widehat{\boldsymbol{u}}(t, \cdot), \varphi(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}\, \mathrm{d}t = \langle \widehat{P(\nabla)\boldsymbol{u}}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(I \times \mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

On procède de manière similaire pour le troisième point. Si $f \in \mathcal{C}^\infty_c(I\times\mathbb{R}^d)$, alors (grâce au support compact) on peut utiliser le théorème de dérivation sous l'intégrale dans l'identité (3) pour obtenir

$$\forall t\in I,\ \forall \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d,\quad \partial_t\widehat{f}(t,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\partial_t f(t,\boldsymbol{x})e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \widehat{\partial_t f}(t,\boldsymbol{\xi}).$$

En conséquence, on a pour tout $\varphi\in\mathcal{C}^\infty_c(I\times\mathbb{R}^d)^n$,

$$\begin{aligned}\langle\partial_t\widehat{\boldsymbol{u}},\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I\times\mathbb{R}^d)} &= -\langle\widehat{\boldsymbol{u}},\partial_t\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I\times\mathbb{R}^d)} = -\langle\boldsymbol{u},\widehat{\partial_t\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'(I\times\mathbb{R}^d)} = -\langle\boldsymbol{u},\partial_t\widehat{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'(I\times\mathbb{R}^d)}\\ &= \langle\partial_t\boldsymbol{u},\widehat{\varphi}\rangle_{\mathcal{D}'(I\times\mathbb{R}^d)} = \langle\widehat{\partial_t\boldsymbol{u}},\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(I\times\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

On a donc bien $\partial_t\widehat{\boldsymbol{u}}=\widehat{\partial_t\boldsymbol{u}}$ au sens des distributions. □

**Théorème 7.** *Supposons qu'il existe $C:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, bornée sur tout compact, telle que*[2]

$$\forall t>0,\quad \forall\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d,\quad \big\|\exp\big(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big)\big\|\leq C(t).$$

*Alors pour tout $\boldsymbol{f}\in L^2(\mathbb{R}^d)^n$, $\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d)^n)$ vérifie (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_\star\times\mathbb{R}^d)$ et $\boldsymbol{u}(t_0,\cdot)=\boldsymbol{f}$ si et seulement si*

$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\qquad \widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot)=\exp\big(tP(\mathrm{i}\,\cdot)\big)\widehat{\boldsymbol{f}}.$$

*De plus, si $\boldsymbol{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^n$, alors $\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$ et (2) est vérifiée au sens classique (ponctuel) .*

*Démonstration.* Soit $\boldsymbol{u}$ définit pour tout $t\in\mathbb{R}^+$ par $\widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot)=\exp\big(tP(\mathrm{i}\,\cdot)\big)\widehat{\boldsymbol{f}}\in L^2(\mathbb{R}^d)^n$. Vérifions d'abord que $\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d)^n)$. En effet, pour presque tout $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$, $t\mapsto\widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot)$ est continue car $\exp\big(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big)\widehat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\xi})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^nP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})^n}{n!}\widehat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\xi})$ et la série est normalement convergente. De plus, sur tout intervalle borné $J\subset\mathbb{R}^+$,

$$\sup_{t\in J}|\widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot)|^2\leq\sup_{t\in J}\big\|\exp\big(tP(\mathrm{i}\,\cdot)\big)\big\|^2\big|\widehat{f}\big|^2\leq\sup_{t\in J}C(t)^2\big|\widehat{f}\big|^2.$$

Par le théorème de la convergence dominée, on a $\widehat{\boldsymbol{u}}\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d)^n)$, et donc (par l'identité de Parseval) $\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d)^n)$. Ensuite, en utilisant le Lemme 6 et le fait que $\partial_t\widehat{u}=P(\mathrm{i}\,\cdot)\widehat{u}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_\star\times\mathbb{R}^d)$, on a immédiatement (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_\star\times\mathbb{R}^d)$, et $\boldsymbol{u}(t_0,\cdot)=\boldsymbol{f}$ est évident.

Réciproquement, si $\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d)^n)$ est solution, alors $\widehat{\boldsymbol{u}}\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d)^n)$ et vérifie l'équation $\partial_t\widehat{\boldsymbol{u}}=P(\mathrm{i}\,\cdot)\widehat{\boldsymbol{u}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_\star\times\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{\boldsymbol{u}}(t_0,\cdot)=\widehat{\boldsymbol{f}}$ . Montrons l'unicité d'une telle solution. Par linéarité, il faut et il suffit de montrer que si $\widehat{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{0}$, alors $\widehat{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}$. Or, pour tout $t>0$ et $\varphi\in\mathcal{C}^\infty_c([0,t]\times\mathbb{R}^d)^n$, on peut définir pour $\epsilon>0$ et $\chi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, croissante, avec $\chi(\tau)=0$ pour $\tau\leq 1/2$ et $\chi(\tau)=1$ pour tout $\tau\geq1$, $\varphi_\epsilon:(\tau,\boldsymbol{\xi})\mapsto\chi(\frac{\tau}{\epsilon})\chi(\frac{t-\tau}{\epsilon})\varphi\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^+_\star\times\mathbb{R}^d)$, et donc

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\boldsymbol{u}}(\tau,\boldsymbol{\xi})\cdot\big(-\partial_t\varphi_\epsilon(\tau,\boldsymbol{\xi})+P^\star(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi})\varphi_\epsilon(\tau,\boldsymbol{\xi})\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\tau=0.$$

En utilisant $\widehat{\boldsymbol{u}}\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d)^n)$, on peut en déduit en prenant la limite lorsque $\epsilon\searrow0$ que

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\boldsymbol{u}}(\tau,\boldsymbol{\xi})\cdot\big(-\partial_t\varphi(\tau,\boldsymbol{\xi})+P^\star(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi})\varphi(\tau,\boldsymbol{\xi})\big)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\tau=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\boldsymbol{u}}(t,\boldsymbol{\xi})\cdot\varphi(t,\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}-\int_{\mathbb{R}^d}\underbrace{\widehat{\boldsymbol{u}}(0,\boldsymbol{\xi})}_{=\boldsymbol{0}}\cdot\varphi(0,\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

Pour tout $\psi\in\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)^n$, on définit $\varphi:(\tau,\boldsymbol{\xi})\mapsto\exp((\tau-t)P^\star(-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\xi}))\psi$. On a $\varphi\in\mathcal{C}^\infty_c([0,t]\times\mathbb{R}^d)^n$, et l'identité précédente devient

$$0=\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{\xi})\cdot\psi(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}.$$

2. Dans la suite, on fixe par convention (sans que cela ait une influence sur les résultats bien-sûr) les notations :

$$\forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n,\quad|\boldsymbol{v}|=\sum_{i=1}^n|\boldsymbol{v}_i|^2\qquad\text{et}\qquad\forall A\in M_n(\mathbb{C}),\quad\|A\|=\sup_{\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}}\frac{|A\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}.$$

Puisque cette identité est vérifiée pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)^n$, on a bien $\boldsymbol{u}(t,\cdot) = \mathbf{0}$ pour tout $t > 0$.

Il reste à montrer que si $\boldsymbol{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors la solution précédemment définie est régulière. On a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ multi-indice, $\xi^\alpha \boldsymbol{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)^n$, et donc $(\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$. En utilisant l'identité $(\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^N}(1+|\xi|^2)^N (\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{\boldsymbol{u}}$ avec $N \in \mathbb{N}$, $N > d/4$, on en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $(\mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^d))$. Ainsi $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)^n$ et $P(\nabla)\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)^n$. En utilisant l'identité (2) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+_\star \times \mathbb{R}^d)$, il suit que $t \mapsto \boldsymbol{u}(t,\cdot)$ est continument dérivable, et $\partial_t \boldsymbol{u} = P(\nabla)\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+_\star \times \mathbb{R}^d)^n$. En procédant par récurrence, on montre de la même manière que $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+_\star \times \mathbb{R}^d)$ pour tout $k \in \mathbb{R}^d$. □

**Remarque 8.** *Si $P$ est homogène d'ordre $m \in \mathbb{N}^\star$ (*i.e.* $\forall \lambda > 0$, $P(\lambda \cdot) = \lambda^m P$)*[3] *l'hypothèse*

$$\forall t > 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \big\| \exp\big(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big)\big\| \leq C(t).$$

*est équivalente à*

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \big\| \exp\big(P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big)\big\| \leq C(1).$$

*ou encore à*

$$\forall t > 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \ |\boldsymbol{\xi}| = 1, \quad \big\| \exp\big(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big)\big\| \leq C(1).$$

*Ces équivalences sont cohérentes avec le fait que si $\boldsymbol{u}$ est solution de* (2)*, alors pour tout $\lambda > 0$, $\boldsymbol{u}_\lambda : (t,\boldsymbol{x}) \mapsto u(\lambda^m t, \lambda \boldsymbol{x})$ l'est également.*

*De la même manière, si $P$ est impaire, alors $\tilde{\boldsymbol{u}} : (t,\boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{u}(-t,-\boldsymbol{x})$ est solution de* (2)*, ce qui permet de résoudre le problème de Cauchy pour les temps négatifs. On dit que l'équation est* réversible.[4]

La proposition suivante donne un critère suffisant pour que les hypothèses du Théorème 7 soient vérifiées.

**Proposition 9.** *Si $P$ est telle que $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$ est diagonalisable en valeurs propres de parties réelles négatives ou nulles, et que les projecteurs spectraux correspondant sont tous bornés, uniformément par rapport à $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, alors il existe $C \geq 0$ tel que*

$$\forall t > 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \big\| \exp\big(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big)\big\| \leq C.$$

*Démonstration.* Les hypothèses de l'énoncé s'écrivent à travers la décomposition

$$P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} \lambda_j(\boldsymbol{\xi}) \Pi_j(\boldsymbol{\xi})$$

avec $m(\boldsymbol{\xi}) \in \{1,\dots,d\}$, $\Re(\lambda_j(\boldsymbol{\xi})) \leq 0$, et $\Pi_j(\boldsymbol{\xi})^2 = \Pi_j(\boldsymbol{\xi})$, $\Pi_i(\boldsymbol{\xi})\Pi_j(\boldsymbol{\xi}) = 0$ si $i \neq j$ ; et il existe $C \geq 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ et $j \in \{1,\dots,m(\boldsymbol{\xi})$, $\big\|\Pi_j(\boldsymbol{\xi})\big\| \leq C$. Il suit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \exp\big(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big) = \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} e^{t\lambda_j(\boldsymbol{\xi})} \Pi_j(\boldsymbol{\xi})$$

et donc

$$\forall t > 0, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \big\| \exp\big(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big)\big\| \leq \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} \big|e^{t\lambda_j(\boldsymbol{\xi})}\big| \big\|\Pi_j(\boldsymbol{\xi})\big\| \leq C \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} e^{t\Re(\lambda_j(\boldsymbol{\xi}))} \leq dC.$$

La preuve est complète. □

3. C'est le cas des exemples précédemment cités : équations de la chaleur, de Schrödinger, de transport, des ondes.

4. C'est le cas de l'équation de transport et des ondes. Pour l'équation de Schrödinger, on peut utiliser que $\overline{P}(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) = -P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$, *i.e.* $\tilde{\psi} : (t,\boldsymbol{x}) \mapsto \overline{\psi(-t,\boldsymbol{x})}$ est solution si $\psi$ est solution. L'équation de la chaleur n'est pas réversible.

La proposition suivante montre que le critère précédent est nécessaire si on désire contrôler l'exponentielle uniformément et pour tous temps (positifs et négatifs) [5], et dans ce cas, les valeurs propres de $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$ sont imaginaires pures.

**Proposition 10.** *Si il existe $C \geq 0$ tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad \big\| \exp\big(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big)\big\| \leq C,$$

*alors pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$ est diagonalisable en valeurs propres de parties réelles nulles, et les projecteurs spectraux correspondant sont tous bornés, uniformément par rapport à $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$.*

*Démonstration.* S'il existe $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ et une valeur propre $\lambda(\boldsymbol{\xi})$ de $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$ telle que $\Re(\lambda(\boldsymbol{\xi})) \neq 0$, alors en notant $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ un vecteur propre associé,

$$\big| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{v}\big| = \big|e^t\lambda(\boldsymbol{\xi})v\big| = e^{t\Re(\lambda(\boldsymbol{\xi}))}\big|\boldsymbol{v}\big| \to +\infty \quad (t\Re(\lambda(\boldsymbol{\xi}) \to \infty).$$

Les valeurs propres de $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$ sont donc nécessairement imaginaires pures. Montrons qu'elles sont semi-simples : s'il existe un bloc de Jordan non trivial, alors il existe une valeur propre $\lambda(\boldsymbol{\xi}) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{v} \in \ker((P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) - \lambda(\boldsymbol{\xi}))^2) \setminus \ker(P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) - \lambda(\boldsymbol{\xi}))$. On a alors

$$\begin{aligned}\big| \exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\boldsymbol{v}\big| &= \big|e^{t\lambda(\boldsymbol{\xi})}\exp(t(P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) - \lambda(\boldsymbol{\xi})))\boldsymbol{v}\big| = \big|e^{t\lambda(\boldsymbol{\xi})}\big|\big|\boldsymbol{v} + t(P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) - \lambda(\boldsymbol{\xi})))\boldsymbol{v}\big| \\ &\geq |t|\big|P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) - \lambda(\boldsymbol{\xi})))\boldsymbol{v}\big| - \big|\boldsymbol{v}\big| \to +\infty \quad (|t| \to \infty).\end{aligned}$$

On a donc, pour tour $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})$ est diagonalisable en valeurs propres imaginaires pures :

$$P(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} \lambda_j(\boldsymbol{\xi})\Pi_j(\boldsymbol{\xi})$$

avec $m(\boldsymbol{\xi}) \in \{1, \dots, d\}$, $\Re(\lambda_j(\boldsymbol{\xi})) = 0$, et $\Pi_j(\boldsymbol{\xi})^2 = \Pi_j(\boldsymbol{\xi})$, $\Pi_i(\boldsymbol{\xi})\Pi_j(\boldsymbol{\xi}) = 0$ si $i \neq j$. Il reste à montrer la borne uniforme sur les projecteurs spectraux.

On a pour tout $\lambda \notin \{\lambda_j(\boldsymbol{\xi}),\ j = 1, \dots, m(\boldsymbol{\xi})\}$,

$$\big(\lambda \operatorname{Id} - P(\boldsymbol{\xi})\big)^{-1} = \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} \frac{1}{\lambda - \lambda_j(\boldsymbol{\xi})}\Pi_j(\boldsymbol{\xi}),$$

et donc, pour tout $j \in \{1, \dots, m(\boldsymbol{\xi})\}$,

$$\Pi_j(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\substack{\lambda \to \lambda_j(\boldsymbol{\xi}) \\ \lambda \neq \lambda_j(\boldsymbol{\xi})}} (\lambda - \lambda_j(\boldsymbol{\xi}))\big(\lambda \operatorname{Id} - P(\boldsymbol{\xi})\big)^{-1}.$$

De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\lambda) > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\lambda}\exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})} e^{-t\lambda}e^{t\lambda_j(\boldsymbol{\xi})}\Pi_j(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{m(\boldsymbol{\xi})}\frac{1}{\lambda - \lambda_j(\boldsymbol{\xi})}\Pi_j(\boldsymbol{\xi}).$$

Il suit, en considérant $\lambda_{j,\epsilon} = \lambda_j(\boldsymbol{\xi}) + \epsilon$,

$$\Pi_j(\boldsymbol{\xi}) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon\big(\lambda_{j,\epsilon} \operatorname{Id} - P(\boldsymbol{\xi})\big)^{-1} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \int_0^{+\infty} e^{-t\lambda_{j,\epsilon}}\exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\,\mathrm{d}t$$

et donc, pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $j \in \{1, \dots, m_j(\boldsymbol{\xi})\}$,

$$\big\|\Pi_j(\boldsymbol{\xi})\big\| \leq \liminf_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \int_0^{+\infty} \big|e^{-t\lambda_{j,\epsilon}}\big|\big\|\exp(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}))\big\|\,\mathrm{d}t = \liminf_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \int_0^{+\infty} e^{-t\epsilon}C\,\mathrm{d}t = C.$$

La preuve est complète. □

5. En particulier lorsque $P$ est impaire et homogène de degré non nul, d'après la remarque précédente.

# 3 Problèmes non-linéaires

Commençons par remarquer que l'étude de la section précédente s'étend sans difficulté au cadre avec terme source :

$$\partial_t \boldsymbol{v} = P(\nabla)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}, \tag{4}$$

où $\boldsymbol{g} \in L^1(I; L^2(\mathbb{R}^d))$ [6], à travers la formule de Duhamel. En effet, dans le cadre du Théorème 7, si l'on note, pour $t \geq 0$,

$$S_t : \boldsymbol{f} \in L^2(\mathbb{R}^d) \mapsto \boldsymbol{u}(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{où } \widehat{\boldsymbol{u}}(t,\cdot) = \exp\big(tP(\mathrm{i}\,\cdot)\big)\widehat{\boldsymbol{f}},$$

alors

$$\boldsymbol{v} : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto S_t\boldsymbol{f} + \int_0^t S_{t-\tau}\boldsymbol{g}(\tau,\cdot)\,\mathrm{d}\tau$$

vérifie $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^d))$, $\boldsymbol{v}(0,\cdot) = \boldsymbol{f}$ et (4) dans $\mathcal{D}'(I \times \mathbb{R}^d)$.

Nous allons considérer dans la suite des équations non-linéaires, de la forme

$$\partial_t \boldsymbol{v} = P(\nabla)\boldsymbol{v} + Q(\boldsymbol{v}), \tag{5}$$

où, comme précédemment, $\boldsymbol{v} : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}^n$, $P \in M_n(\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_d])$, et $Q \in (\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_d])^n$. L'objectif est de considérer $Q(\boldsymbol{v})$ dans (5) comme un terme source similairement à $\boldsymbol{g}$ plus haut. Il faut noter néanmoins que $L^2(\mathbb{R}^d)$ n'est pas une algèbre de Banach (le produit de deux fonctions de carré intégrable n'est pas – nécessairement – de carré intégrable). C'est pourquoi nous allons travailler avec les espaces de Sobolev définis de la manière suivante [7]

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \ : \ \langle\cdot\rangle^s \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

où $\langle\cdot\rangle := (1+|\cdot|^2)^{1/2}$, et que l'on munit de la topologie associée à la norme $\big\|f\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \big\|\langle\cdot\rangle^s\widehat{f}\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. En effet, on a la propriété suivante :

**Lemme 11.** *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach. Si $s > d/2$, alors $H^s(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ est une algèbre de Banach, et il existe $C_s > 0$ tel que*

$$\forall f, g \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \big\|fg\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq C_s \big\|f\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big\|g\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

*Démonstration.* On vérifie immédiatement que $(H^s(\mathbb{R}^d), \big\|\cdot\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On vérifie facilement que c'est un espace complet, en utilisant que la transformée de Fourier est bijective dans les distributions tempérées et $L^2(\mathbb{R}^d)$ est complet.

On a $H^s(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ car si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f} = \langle\cdot\rangle^{-s}\langle\cdot\rangle^s\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ puisque $\langle\cdot\rangle^{-s} \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

De plus, en utilisant l'identité

$$\widehat{f \star g}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}(\widehat{f} \star \widehat{g})(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\boldsymbol{\eta})\widehat{g}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$$

et l'inégalité valide pour tout $a, b, \theta \geq 0$ : $\langle a+b\rangle^\theta \leq 2^\theta(\langle a\rangle^\theta + \langle b\rangle^\theta)$, on a pour tout $f, g \in H^s(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle\cdot\rangle^s|\widehat{f \star g}| \leq \frac{2^{s/2}}{(2\pi)^{d/2}}(\langle\cdot\rangle|\widehat{f}|) \star |\widehat{g}| + \frac{2^{s/2}}{(2\pi)^{d/2}}|\widehat{f}| \star (\langle\cdot\rangle|\widehat{g}|).$$

On a bien $\langle\cdot\rangle^s\widehat{f \star g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et l'inégalité voulue, d'après l'inégalité de Young pour la convolution, et du fait que $\langle\cdot\rangle\widehat{f}, \langle\cdot\rangle\widehat{g} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. □

6. La construction de l'intégrale de Lebesgue s'étend aux fonctions à valeurs dans un espace de Banach, il s'agit de l'intégrale de Bochner. On peut aussi, pour simplifier, se restreindre à $\boldsymbol{g} \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{K}^n)$, auquel cas on peut définir trivialement l'intégrale comme limite de sommes de Riemann.

7. Si $s \in \mathbb{N}$, alors on peut définir de manière équivalente

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \ : \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \leq s,\ \partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

munit de la topologie associée à la norme $\big\|f\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \big(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d\\|\alpha|\leq s}} \big\|\partial^\alpha f\big\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2\big)^{1/2}$.

**Théorème 12.** *Soit $P \in M_n(\mathbb{K}[X_1,\dots,X_d])$ telle qu'il existe $C>0$ et $J$ intervalle contenant 0 telle que*
$$\forall t\in J,\quad \forall \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d,\quad \big\|\exp\big(tP(\mathrm{i}\boldsymbol{\xi})\big)\big\|\leq C.$$
*Soit $Q\in(\mathbb{K}[X_1,\dots,X_d])^n$, $M>0$, et $s>d/2$. Alors il existe $T>0$ tel que pour tout $\boldsymbol{f}\in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $\big\|\boldsymbol{f}\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leq M$, il existe un unique $\boldsymbol{v}\in\mathcal{C}^0([0,T];H^s(\mathbb{R}^d))$ solution de*
$$\boldsymbol{v}(t,\cdot)=S_t\boldsymbol{f}+\int_0^t S_{t-\tau}Q(\boldsymbol{v}(\tau,\cdot))\,\mathrm{d}\tau,$$
*où l'on note $S_t:\boldsymbol{f}\in H^s(\mathbb{R}^d)\mapsto \boldsymbol{u}(t,\cdot)\in H^s(\mathbb{R}^d)$ où $\boldsymbol{u}$ est la solution de (5) définie au Théorème 7. De plus, $\boldsymbol{v}$ vérifie (5) au sens des distributions et si $\boldsymbol{f}\in\cap_{k\in\mathbb{N}}H^k(\mathbb{R}^d)^n$, alors $\boldsymbol{v}\in\mathcal{C}^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ et l'équation (5) est vérifiée au sens classique (ponctuel) .*

*Démonstration.* Le premier point sera obtenu comme application du théorème du point fixe contractant de Banach sur l'application
$$F:\begin{array}{ccl} X_T & \to & X_T\\ \boldsymbol{v} & \mapsto & S_t\boldsymbol{f}+\int_0^t S_{t-\tau}Q(\boldsymbol{v}(\tau,\cdot))\,\mathrm{d}\tau\end{array}$$
où
$$X_T=\Big\{\boldsymbol{v}\in\mathcal{C}^0([0,T];H^s(\mathbb{R}^d))\ :\ \sup_{t\in[0,T]}\big\|\boldsymbol{v}(t,\cdot)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leq 2CM\Big\},$$
et $T$ vérifie en particulier $[0,T]\subset J$ et sera défini ultérieurement. L'espace $X_T$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^0([0,T];H^s(\mathbb{R}^d))$ qui est un Banach [8], et est donc complet. On vérifie sans problème $S_t\boldsymbol{f}\in\mathcal{C}^0([0,T];H^s(\mathbb{R}^d))$ et (en utilisant la propriété d'algèbre de $H^s(\mathbb{R}^d)$) si $\boldsymbol{v}\in\mathcal{C}^0([0,T];H^s(\mathbb{R}^d))$, $S_{t-\tau}Q(\boldsymbol{v}(\tau,\cdot))\in\mathcal{C}^0([0,T];H^s(\mathbb{R}^d))$, donc $F(X_T)\subset\mathcal{C}^0([0,T];H^s(\mathbb{R}^d))$. Montrons que si $T$ est choisi suffisamment petit, $F(X_T)\subset X_T$ et $F$ est une application contractante.

On a immédiatement, pour tout $t\in J$,
$$\forall t\in J,\quad \big\|S_t\boldsymbol{f}\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leq C\big\|\boldsymbol{f}\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leq CM.$$
De plus, d'après le Lemme 11, il existe $C_{s,Q}\geq 0$ et $C'_{s,Q}\geq 0$, dépendant uniquement de $Q$, et $s$ tels que
$$\forall \boldsymbol{g}\in H^s(\mathbb{R}^d),\qquad \big\|Q(\boldsymbol{g})\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leq C_{s,Q}\big\|\boldsymbol{g}\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big\langle\big\|\boldsymbol{g}\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big\rangle^{\deg(Q)-1},$$
$$\forall \boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2\in H^s(\mathbb{R}^d),\quad \big\|Q(\boldsymbol{g}_1)-Q(\boldsymbol{g}_2)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leq C'_{s,Q}\big\|\boldsymbol{g}_1-\boldsymbol{g}_2\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big\langle\max(\{\big\|\boldsymbol{g}_1\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},\big\|\boldsymbol{g}_2\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\})\big\rangle^{\deg(Q)-1}.$$
En conséquence, on a pour tout $\boldsymbol{v}\in X_T$
$$\forall t\in[0,T],\quad \Big\|\int_0^t S_{t-\tau}Q(\boldsymbol{v}(\tau,\cdot))\,\mathrm{d}\tau\Big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\leq\int_0^t\big\|S_{t-\tau}Q(\boldsymbol{v}(\tau,\cdot))\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}\tau\leq CTC_{s,Q}2CM\langle 2CM\rangle^{\deg(Q)-1}.$$
Finalement, pour tout $\boldsymbol{v}_1\in X_T$ et $\boldsymbol{v}_2\in X_T$,
$$\begin{aligned}\forall t\in[0,T],\quad &\Big\|\int_0^t S_{t-\tau}Q(\boldsymbol{v}_1(\tau,\cdot))\,\mathrm{d}\tau-\int_0^t S_{t-\tau}Q(\boldsymbol{v}_2(\tau,\cdot))\,\mathrm{d}\tau\Big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq CTC'_{s,Q}\sup_{t\in[0,T]}\big\|(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)(t,\cdot)\big\|\langle 2CM\rangle^{\deg(Q)-1}.\end{aligned}$$
En choisissant
$$T=2C\max(\{C_{s,Q},C'_{s,Q}\})\langle 2CM\rangle^{\deg(Q)-1}$$

8. on vérifie facilement que si $X$ est un espace de Banach et $J\subset\mathbb{R}$ est compact, alors $\mathcal{C}^0(J;X)$, que l'on munit de la norme $\big\|\boldsymbol{v}\big\|_{L^\infty(J;X)}:=\sup_{t\in J}\big\|\boldsymbol{v}(t,\cdot)\big\|_X$ est également un espace de Banach.

on a $F(X_T) \subset X_T$ et $F$ est 1/2-Lipschitzienne. Le théorème de point fixe de Banach nous permet de conclure à l'existence de $\boldsymbol{v} \in X_T$ solution de $\boldsymbol{v} = F(\boldsymbol{v})$. On peut montrer l'unicité d'une telle solution dans $\mathcal{C}^0([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ par un argument de continuité : s'il existe $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d))$ vérifiant $\boldsymbol{v}_1 = F(\boldsymbol{v}_1)$ et $\boldsymbol{v}_2 = F(\boldsymbol{v}_2)$, alors

$$I = \{t \in [0,T] \ : \ \forall \tau \in [0,t], \ \boldsymbol{v}_1(\tau,\cdot) = \boldsymbol{v}_2(\tau,\cdot)\}$$

est un fermé (c'est l'image réciproque de $\{\boldsymbol{0}\}$ par l'application continue $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$), ouvert (en exploitant des estimations similaires à celles ci-dessus) et non-vide ($0 \in I$ car $\boldsymbol{v}_1(0,\cdot) = \boldsymbol{f} = \boldsymbol{v}_2(0,\cdot)$) de l'intervalle (connexe) $[0,T]$. Donc $I = [0,T]$, et $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$.

Il reste à montrer que $\boldsymbol{v}$ vérifie bien (5) dans $\mathcal{D}'(I \times \mathbb{R}^d)$. Or on a bien par définition

$$\partial_t\big(S_t \boldsymbol{f}\big) = P(\nabla)\big(S_t \boldsymbol{f}\big)$$

et on vérifie que (au sens des distributions)

$$\partial_t\Big(\int_0^t S_{t-\tau} Q(\boldsymbol{v}(\tau,\cdot))\,\mathrm{d}\tau\Big) = Q(\boldsymbol{v}(t,\cdot)) + \int_0^t P(\nabla)\big(S_{t-\tau}Q(\boldsymbol{v}(\tau,\cdot))\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

Finalement, si $\boldsymbol{f} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H^k(\mathbb{R}^d)^n$, on veut montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^k(\mathbb{R}^d))$. On peut utiliser la méthode précédente pour montrer que sur un intervalle $[0, T_k]$, dépendant de $k \in \mathbb{N}$, l'application $F$ définit de manière unique $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^0([0,T_k]; H^k(\mathbb{R}^d))$. Pour montrer que l'on peut étendre l'intervalle $[0,T_k]$ à $[0,T]$, il faut remarquer que $T_k$ ne dépend que de $s, Q$ $k$ et $M$ (la taille de la donnée initiale, , mesurée de $H^s(\mathbb{R}^d)$), en exploitant une version raffinée de l'inégalité du Lemme 11 (avec la même preuve) :

$$\forall f,g \in H^s(\mathbb{R}^d) \cap H^k(\mathbb{R}^d), \quad \big\|fg\big\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} \le C_{s,k}\big(\big\|f\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big\|g\big\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} + \big\|f\big\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}\big\|g\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\big).$$

En utilisant le contrôle uniforme (connu) de $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^s(\mathbb{R}^d))$, et en exploitant l'unicité de la solution, on peut ainsi montrer que $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^0([0,T_k]; H^k(\mathbb{R}^d))$, puis $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^0([0,2T_k]; H^k(\mathbb{R}^d))$, puis $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^0([0,3T_k]; H^k(\mathbb{R}^d))$, *etc.* Il suit $\boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^k(\mathbb{R}^d))$, et on conclut ensuite en utilisant (5) comme au Théorème 7. □

**Remarque 13.** *Le choix de travailler dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ a été motivé par le fait d'avoir un espace qui soit à la fois basé sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ et une algèbre de Banach. Dans le cas de l'équation de la chaleur, on peut travailler directement dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ (ou $\mathcal{C}^0((2\pi\mathbb{T})^d)$). Dans ce cas, on peut même traiter des termes non-linéaires de la forme*

$$\partial_t u = \Delta u + \sum_j \partial_{x_j}(a_j(u)) + b(u),$$

*où $a_j$ ($j \in \{1,\dots,d\}$) et $b$ sont des polynômes, en utilisant le caractère régularisant du noyau de la chaleur sous forme quantitative : $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $1 \le p \le +\infty$, il existe $C_{p,\alpha} \ge 0$ tel que*

$$\forall u \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad \forall t > 0, \quad \big\|\partial^\alpha(\widetilde{K}_t \star u)\big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \big\|\partial^\alpha \widetilde{K}_t\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\big\|u\big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C_{p,\alpha}\big\|u\big\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} t^{-|\alpha|/2}.$$