

Séries temporelles de direction de vent

Pierre Ailliot¹, Julie Bessac², Valérie Monbet², Françoise Pène¹

²LMBA, Brest

²Univ. Rennes 1/IRMAR + INRIA/ASPI

October 24, 2014

- Motivations

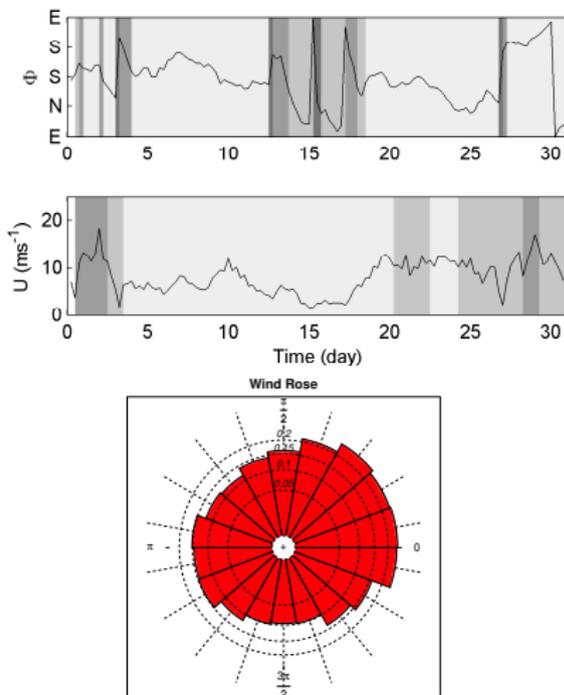
- Météo
- Pollution
- Dimensionnement d'ouvrages
- Covariable (vague, vitesse vent)

- Données (Ouessant, 44 ans, $\Delta t = 6$ h, mois de janvier et février)

- Variables circulaires définies sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$
- Bimodalité (régimes)
- Sens de rotation privilégié

- Difficultés

- On perd les outils basés sur des distances usuelles.
- Modèles non linéaires (régimes latents)
- Transitions non homogènes entre les régimes



Mardia'75, Fisher'93, Mardia et Jupp'07, Holzman et al.'06, Hugues'07

- Discrétisation (Breckling, 89), (Holzmann, 06): 36 classes
→ chaîne de Markov

Taille de la matrice de transition...

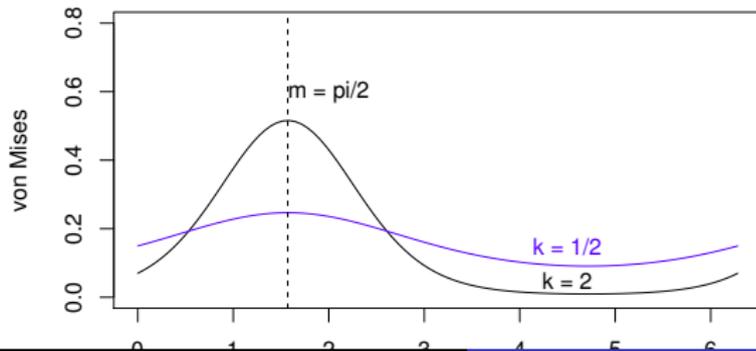
- Wrapped Gaussian : $\Phi = Y \bmod 2\pi$ avec Y de densité g

$$p(\Phi; \theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} g(\varphi + 2k\pi), 0 \leq x < 2\pi$$

souvent difficile à calculer

- Modèle autorégressif de von Mises
 - Densité von Mises

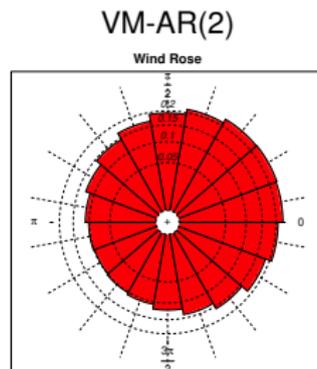
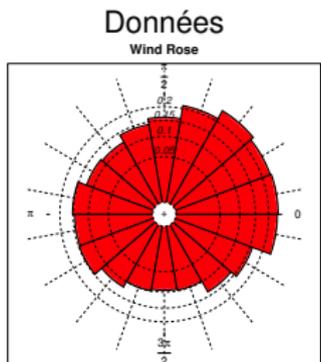
$$f_{VM}(\Phi; \varphi, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} \exp(\kappa \cos(\Phi - \varphi)) = \frac{1}{2\pi |I_0(\gamma)|} \left| e^{\gamma e^{-i\Phi}} \right|$$



Modèle autorégressif de von Mises

- Un processus $(\Phi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est appelé processus autorégressif de von Mises d'ordre p , si

$$\begin{aligned} p(\Phi_t | \Phi_{t-1}, \dots, \Phi_{t-p}) &= \frac{1}{b_t} \exp \left(\kappa_0 \cos(\Phi_t - \varphi_0) + \sum_{\ell=1}^p \kappa_\ell \cos(\Phi_t - \Phi_{t-\ell} - \varphi_\ell) \right) \\ &= \frac{1}{b_t} \left| \left([\gamma_0 + \sum_{\ell=1}^p \gamma_\ell e^{i\Phi_{t-\ell}}] e^{-i\Phi_t} \right) \right| \end{aligned}$$

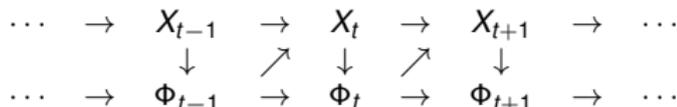


- Pas de bimodalité \rightarrow mélange de processus autorégressifs

Ref : Breckling'89

Processus autoregressif à chaîne de Markov cachée non homogène

- La distribution de $X_t | \{X_{t'}\}_{t' < t}, \{\Phi_{t'}\}_{t' < t}$ ne dépend que de X_{t-1} et Φ_{t-1} et on note $p_1(x_t | x_{t-1}, \phi_{t-1}) = P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, \Phi_{t-1} = \phi_{t-1})$.
- La distribution de $\Phi_t | \{\Phi_{t'}\}_{t' < t}, \{X_{t'}\}_{t' \leq t}$ ne dépend que de X_t et $\Phi_{t-1}, \dots, \Phi_{t-p}$
 $\rightarrow p_2(\phi_t | x_t, \phi_{t-p}^{t-1})$.



- Remarques : cadre général
 - Si $p_1(x_t | x_{t-1}, \phi_{t-1})$ ne dépend pas de $\phi_{t-1} \rightarrow$ MS-AR classique qui inclut les HMM ($p = 0$).
 - Si $M = 1, \{\Phi_t\} \rightarrow$ AR(p).
 - Si $p_{1,\theta}(x_k | x_{k-1}, \phi_{k-s}^{k-1})$ ne dépend pas de x_{k-1} et est paramétrisé en utilisant une fonction indicatrice \rightarrow Threshold AutoRegressive (TAR)
 Ref : Tong'90.

NHMS-AR pour la direction du vent

- L'évolution de la direction est modélisée par un AR von Mises

$$p_2(\Phi_t | x_t, \Phi_{t-s}^{t-1}) = \frac{1}{b(x_t, \Phi_{t-s}^{t-1})} \left| \exp \left([\gamma_0^{(x_t)} + \sum_{\ell=1}^s \gamma_{\ell}^{(x_t)} e^{i\Phi_{t-\ell}}] e^{-i\Phi_t} \right) \right|$$

avec $\gamma_{\ell}^{(x)} = \kappa_{\ell}^{(x)} e^{i\varphi_{\ell}^{(x)}} \in \mathbb{C}$ pour $x \in \{1, \dots, M\}$

- La probabilité de transiter d'un régime dépressionnaire à un régime anticyclonique est plus grande quand le vent souffle du Nord que du Sud

$$p_1(x_t | x_{t-1}, \phi_{t-1}) \propto q_{x_{t-1}, x_t} f_{VM}(\phi_{t-1}; \lambda_{x_{t-1}, x_t}, \psi_{x_{t-1}, x_t})$$

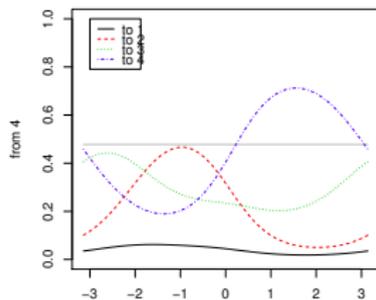
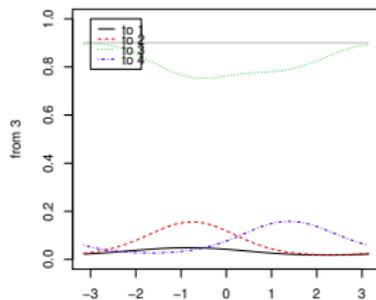
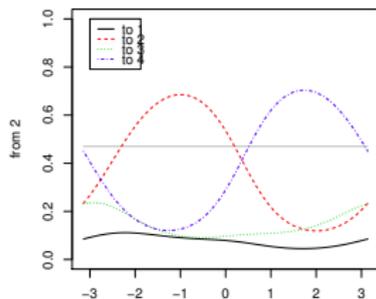
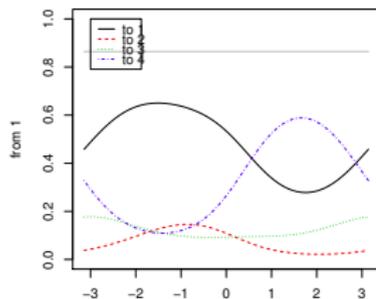
- Estimation des paramètres : algorithme EM
E-step : Forward-Backward non homogène
M-step : estimateurs du maximum de vraisemblance (optimisation numérique)
- Consistance et identifiabilité (à une permutation près)

Choix du modèle

- Les modèles non homogènes ont des BIC plus faibles que les modèles homogènes
→ NH
- Les modèles d'ordre 2 ont un BIC plus faible que les modèles d'ordre 1
→ $p = 2$
- Les BIC sont les plus faibles pour des modèles à 3 ou 4 classes.
- Le modèle à 4 classes permet de mieux reproduire la loi marginale
→ $M = 4$

	M	1	2	3	4	5	6	k
Model	p	BIC						
HMS-EVM	1	7778	6326	6334	6307	6277	6385	$M(M-1)+4M$
NHMS-EVM	1	7778	6266	6171	6141	6158	6372	$M(M+1)-1+4M$
HMS-EVM	2	7568	5952	5979	5963	6051	6075	$M(M-1)+6M$
NHMS-EVM	2	7568	5882	5872	5882	5968	6075	$M(M+1)-1+6M$

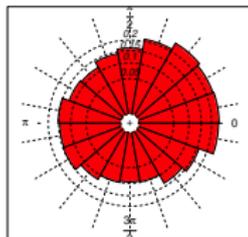
- Probabilités de transition



- Lois marginales

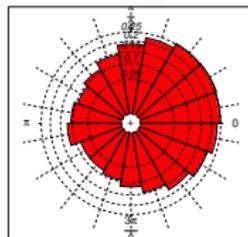
Données

Wind Rose



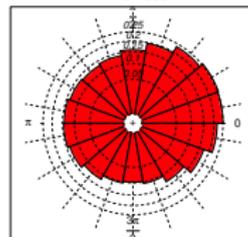
MSAR

Wind Rose



NH-MSAR

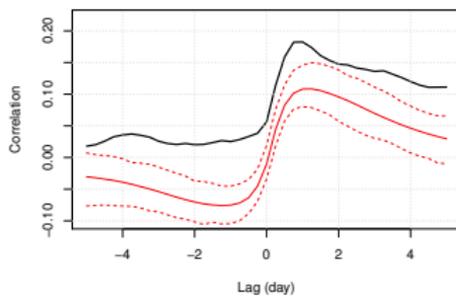
Wind Rose



- Structure d'ordre 2

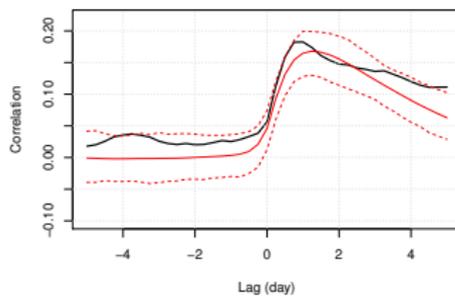
MSAR

cos, sin



NH-MSAR

cos, sin



- Pour les directions
 - La distribution de von Mises est naturelle pour les données circulaires.
 - On en déduit un modèle auto-régressif.
 - Pour les directions de vent, on construit un modèle autorégressif à changements de régime non homogènes, qui permet de reproduire les cycles observés sur les données.

- Plus généralement
 - MSAR non homogène fournissent un cadre souple et interprétable.
 - L'inférence reste assez simple.
 - On peut les généraliser : MS-VAR, ajout de covariables, modèles spatio-temporels, etc.
 - Principale difficulté : contraindre les marginales.

Ref : Alliot et al. '14