Eléménts pour le calcul des probabilités
Exercices
2015-2016
PRA - L2 MIASHS

V. Monbet

1

Séries numériques

1. On considère la suite géométrique (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \alpha u_n \end{cases}$$

   avec α un réel appelé *raison* de la suite.

   (a) Montrer que le terme général s'écrit $\forall n \geq 0$, $u_n = \alpha^n$.

   (b) Quel est le comportement de la suite si

      i. $\alpha > 1$?

      ii. $\alpha = 1$?

      iii. $\alpha \in]0, 1]$?

      iv. $\alpha = -1/2$?

2. Suite définie par récurrence. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$$

   (a) Montrer que $\forall n \geq 0 :\ u_n^2 < 4$. En déduire que la suite est $(u_n)_{n\geq 0}$ bornée.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone (étudier par exemple le signe de $u_{n+1}^2 - u_n^2$).

   (c) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est-elle convergente? Si oui, calculer sa limite.

   (d) Retrouver graphiquement ce résultat.

3. Le principe de l'étau. On déifinit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

   (a) Encadrer la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par deux suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ de même limite.

   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

4. Considérons la suite de terme $u_n = n + (-1)^n$

   (a) Tracer les premiers termes de la suite.

   (b) Donner son comportement.

   (c) Montrer que (u_n) tend vers l'infini.

5. On rappelle qu'au voisinage de 0, on a $\ln(1+x) \sim x$ et $e^x \sim 1 + x$. Déterminer les limites suivantes

   (a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} n^2 \left((n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}\right)$

   (d) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - n^{n-1}\right)$

   (e) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

6. Soient $u_n = 1$, $v_n = 1$ et $w_n = -1$.

   (a) Montrer que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont divergentes.

   (b) Quel est la nature de $\sum(u_n + v_n)$?

   (c) Quel est la nature de $\sum(u_n - w_n)$?

7. Quelle est la nature de la série géométrique de raison $|\alpha| \geq 1$?

8. Etudier la nature des séries dont le terme général u_n est donné ci-dessou (comparaison à la série géométrique)

   (a) $u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 3^n}$

   (b) $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)^n$

   (c) $u_n = (3 + (-1)^n)^{-n}$

   (d) $u_n = \frac{1}{1+x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}$

9. Via une minoration des sommes partielles (s_N), montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente, mais non trivialement.

10. On considère la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ définie par $u_{2n} = \frac{1}{n+1}$ et $u_{2n+1} = \frac{-1}{n+1}$. Calculer les sommes partielles (s_N) en fonction de la parité de N. En déduire que la série est semi-convergente.

11. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. On commencera par montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

12. En utilisant l'inégalité $\sin x \leq x$ pour tout x positif, montrer que la série $\sum \sin \frac{1}{2^n}$ est convergente.

13. On veut connaitre la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et sa somme éventuelle.

(a) Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples ie sous la forme

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$$

(b) Voir alors que dans la somme partielle s_N les termes se télescopent et en déduire une expression simple de s_N

(c) Montrer que la série est convergente et calculer sa somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

14. On étudie cette fois la série $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n}$.

    (a) En notant que $n = (n+1) - 1$, montrer que

    $$s_N = 2s_{N+1} + \frac{1}{2^N} - 2$$

    (b) Grâce à la relation liant s_N et s_{N+1}, en déduire que la série est convergente, de somme égale à 2.

15. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

2

Variables aléatoires discrètes

1. Problème de dépistage

   (a) Soit un espace probabilisé muni d'une partition $(H_1, \cdots, H_n)$ en n évènements de probibilités non nulles. Soit A tel que $P(A) > 0$. Rappeler la forumle de Bayes.

   (b) Application : Test de dépistage.
   Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 1000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Néanmoins, sur une personne non malade, le test est positif à 0.2%. Calculer la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsque son test est positif. Qu' en pensez-vous ?

2. Composition de familles
   Une population est composée de familles de 0, 1, 2 ou 3 enfants. Il y a une famille sans enfant pour 3 de 1 enfant, 4 de 2 enfants et 2 de 3 enfants. On suppose que les deux sexes sont équiprobables et qu'ils sont indépendants pour deux enfants différents.

   (a) Donner les probabilités des nombres d'enfants par famille p_0, p_1, p_2, p_3.

   (b) On choisit une famille au hasard : quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun garçon ?

   (c) Toujours pour une famille choisie au hasard, quelle est la probabilité qu'elle ait 2 enfants sachant qu'elle n'a aucun garçon ?

3. Ebru is an entrepreneur. She plans to start 2 different very small businesses in the next year. Both businesses are independent of each other, and each business has a 50 percent chance of being successful and a 50 percent chance of failing. Each business will make Ebru 200$ if it succeeds or lose her 200$ if it fails. if X is a random variable that represents Ebru's profit from starting these 2 businesses, plot the probability distribution of X.

4. Vlad is going to flip a fair coin 3 times. Each coin flip is an independent event. If X is a random variable that represents the number of heads after 3 flips of a fair coin, give the probability distribution of X.

5. Caroline has a unique pet chimpanzee that is relatively likely to have twins. Each pregnancy is independent, and Caroline's chimpanzee has a 60 percent chance of having 1 baby and a 40 percent chance of having 2 babies each pregnancy. If X is a random variable that represents the total number of chimpanzee babies if Caroline's chimpanzee gets pregnant twice. Give the probability distribution of X.

6. Elena loves to go fishing in northern Minnesota. Each time she catches a fish is independent, and there is a 60 percent chance it is a northern pike and a 40 percent chance it is a walleye each time. If X is a random variable that represents the number of northern pike Elena catches if she catches 2 fish. Give the probability distribution of X?

7. Soient $X_1, \cdots, X_{n+m}$, $n+m$ variables indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\pi)$.

   (a) Donner la loi de $X = X_1 + \cdots + X_n$.

   (b) Donner la loi de $Y = X_{n+1} + \cdots + X_{n+m}$.

   (c) Donner la loi de $Z = X + Y$.
   Rappel : identité de Vandermonde

$$\binom{n+m}{\ell} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{k} \binom{m}{\ell - k}$$

8. Montrer que $P(X = n) = \pi(1-\pi)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ définit bien une probabilité.

9. On lance un dé équilibré et on appelle X l'indice de la première apparition du numéro 5. Écrire la loi de X.

10. Donner l'expression et "tracer" la fonction de répartition de la loi de Bernouilli de paramètre $2/3$ puis de la loi géométrique de paramètre $3/4$.

11. Lors d'une visite médicale, n patients de tailles différentes se présentent devant le médecin, et ce dans un ordre aléatoire. On note X le rang de présentation du plus grand d'entre eux. Donner la loi de la variable X.

12. Un étudiant aviné sort de chez un ami un jeudi soir comme les autres à Rennes. A l'instant $n = 0$ il est en O et se déplace à chaque instant entier de $+1$ ou de -1, et ce de façon équiprobable. Soit Y_n la variable aléatoire égale à 1 si à l'instant $2n$ l'étudiant se retrouve à nouveau en son point de départ, et $Y_n = 0$ sinon. Donner le paramètre de cette loi de Bernoulli.

13. Dans un magasin il y a n clients et m caisses. Chaque client choisit une caisse au hasard et on appelle X le nombre de clients choisissant la caisse numéro 1. Donner la loi de X.

14. Au cours d'une expérience un certain évènement E se réalise avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On répète de façon indépendante l'expérience jusqu'à obtenir r fois E. Soit X la variable aléatoire associée au nombre de réalisations de E^c. Déterminer la loi de X.

15. On considère une suite d'expériences indépendantes dont l'issue est un succès avec probabilité π et un échec avec probabilité $1 - \pi$.

    (a) Montrer que le nombre de succès parmis les n premières expériences suit une loi binomiale de paramètres n et p.

    (b) Montrer que l' "instant" où a lieu le premier succès suit une loi géométrique de paramètre π.

16. Loi géométrique

    (a) Rappeler le comportement des séries $\sum_{n\geq 0} a^n$, $\sum_{n\geq 1} na^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)a^{n-2}$.

    (b) En déduire que la loi géométrique de paramètre $\pi \in]0, 1[$ définit bien une loi de probabilité.

17. On lance une pièce équilibrée jusqu'à la première apparition de Pile. Quelle est la probabilité que Pile n'apparaisse jamais (on pourra appeler E_n l'événement : "Pile n'apparaît pas durant les n premiers lancers" et appliquer la continuité monotone décroissante) ? On exclut ce cas et on appelle X la variable correspondant à la première apparition de Pile. Donner la loi de X et représenter sa fonction de répartition.

18. On lance un dé équilibré et on appelle X la variable correspondant à la première apparition du numéro 1 (avec la même hypothèse que dans la question précédente). Donner la loi de X et représenter sa fonction de répartition.

19. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.

    (a) Calculer la loi de $X_1 + X_2$.

    (b) Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Quel est le nom de cette loi?

20. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Chaque réalisation de X est affichée sur un compteur qui est détraqué comme suit : si X n'est pas nul, le compteur affiche la vraie valeur de X ; si X est nul, le compteur affiche un nombre au hasard entre 1 et n. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre affiché. Donner la loi de Y.

21. Donner une représentation d'une probabilité discrète symétrique autour de 0. Quelle est l'espérance de X?

22. Donner la table de la distribution d'une variable aléatoire discrète (ex $P(X = 2) = 0.06$, $P(X = 3) = 0.42$, $P(X = 7) = .52)$). Quelle est l'espérance de X?

23. Joseph just bought a brand new cell phone and a warranty for the cell phone. The warranty cost 300 euros and is worth 800 euros if his phone breaks. Joseph estimates that there is a 20, percent chance of his phone breaking. Joseph calculates the expected value of buying the warranty to be -140 euros. Which of the following statements are true?

    (a) Joseph will certainly lose value from the warranty.

    (b) If Joseph was going to buy a large number of phones, and he bought the warranty on each phone, he should expect to lose value from the warranties.

24. Mahnoor owns and operates Mahnoor's Coffee Shop. The city of Laketown, Australia, where Mahnoor's Coffee Shop is located, recently enacted a ban on all foam cups to help protect the environment. Instead of switching to paper cups, Mahnoor has decided to risk being fined by the city and to continue to use foam cups. She estimates that this will save her 10000 Australian dollars. She also estimates that there is a 12, percent chance that she will be fined. The fine would be for 100000 Australian dollars. Quelle est la somme espérée?

25. Donner l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$. Quelle est sa variance?

26. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs sur $x_n = n$ pour tout $n \geq 1$ et dont la loi est donnée par $p_n = P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

    (a) Montrer que $(p_n)_{n\geq 1}$ définit bien une loi de probabilité.

    (b) Montrer que l'espérance de X n'est pas définie.

27. Ivy is in Las Vegas and bet on her favorite team, the Denver Dragons, to beat the Seattle Sea Turtles. If the Denver Dragons win, she will win 10 dollars. If the Seattle Sea Turtles win, she will lose 11 dollars (the extra dollar is commission). Ivy estimates that there is a 50 percent chance of the Denver Dragons winning (there cannot be a tie). Find the expected return of placing this bet.

28. Loi de Bernoulli

    (a) Calculer la moyenne et la variance d'une loi de Bernoulli définie sur $\{0, 1\}$ et de paramètre π.

    (b) Quelle valeur de π maximise la variance?

    (c) Calculer la moyenne et la variance d'une loi de Bernoulli définie sur $\{a, b\}$ et de paramètre π. a et b sont deux réels quelconques.

29. Calculer la moyenne et la variance d'une loi géométrique de paramètre π.

30. Lors du championnat de France de Ligue 1 de football (saison 2004-2005), on a relevé le nombre de buts marqués par équipe et par match lors de l'ensemble des 38 journées de championnat. En tout, 824 buts ont été marqués lors des 380 matchs disputés (cf. tableau ci-dessous). Soit X la variable correspondant au nombre de buts marqués par une équipe et par match. Déduire la loi de X du tableau. Via $P(X = 0)$ trouver un paramètre λ tel que la loi de X ressemble à une loi de Poisson

$\mathcal{P}(\lambda)$.

Buts marqués par équipe et par match	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Équipes ayant marqué ce nombre de buts	268	266	152	53	13	7	0	0	1	760

31. Soit X une variable aléatoire discrète de loi uniforme sur l'ensemble $\mathcal{X} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Calculer l'espérance de $Y = X^2$.

32. Soit X une variable distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λ. Exprimer en fonction de λ

    (a) $E[3X + 5]$

    (b) $E\left[\frac{1}{X+1}\right]$

33. Montrer que $Var(X) = E[X^2] - E(X)^2$

34. Montrer que si a et b sont deux réels, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

35. Montrer que $Var(X) = 0$ si et seulement si X est constante.

36. Un jeu consiste à tirer, indépendamment et avec remise, des tickets d'une boîte. Il y a en tout 4 tickets, numérotés respectivement -2, -1, 0, 3. Votre "gain" X lors d'une partie correspond à la somme indiquée sur le ticket. Par exemple, si vous tirez le ticket numéroté -2, alors $X = -2$ et vous devez donner 2 euros, tandis que si vous tirez le ticket 3, alors $X = 3$ et vous gagnez 3 euros.

    (a) Donner la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.

    (b) Vous jouez 100 fois de suite à ce jeu et on note S votre gain après 100 parties. En notant X_1 le gain à la première partie, X_2 le gain à la deuxième partie, $\cdots$, X_{100} le gain à la centième partie, exprimer S en fonction des X_i.

    (c) En déduire la variance et l'espérance de X.

37. Soit T une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre π, $0 < \pi < 1$. Rappeler la loi de T, son espérance et sa variance.

38. Vous demandez à des personnes choisies au hasard dans la rue leur mois de naissance jusqu'à en trouver une née en décembre. Quel est (approximativement) le nombre moyen de personnes que vous allez devoir interroger ?

39. On jette une pièce équilibrée et on appelle X le nombre de lancers nécessaires pour que Pile apparaisse. Quelle est la loi de X ?

40. Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que Pile apparaisse. Si Pile apparaît dès le premier lancer, Bob lui donne 4 euros ; si Pile n'apparaît qu'au deuxième lancer, Bob lui donne 1 euros ; si Pile n'apparaît qu'au troisième lancer, elle donne 4euros à Bob ; si Pile n' apparaît qu'au quatrième lancer, elle donne 11 euros à Bob, etc. De façon générale, le "gain" d'Alice si Pile n'apparaît qu'au n-ème lancer est $5 - n^2$. Notons G la variable aléatoire correspondant à ce gain.

    (a) Calculer la probabilité qu'Alice perde de l'argent lors d'une partie.

(b) Calculer l'espérance de G.

(c) Si vous deviez jouer une seule partie, préféreriez-vous être à la place d'Alice ou à la place de Bob ? Et si vous deviez en jouer 100 ?

41. Soient X et Y deux variables indépendantes de loi de Bernoulli de paramètres π_X et π_Y. On note $Z = X + Y$ et $T = X - Y$, calculer l'espérance et la variance de Z et de T.

42. **Le beaujolais nouveau est arrivé.** *Contrôle terminal 2015.*

(a) Un amateur éclairé, mais excessif, se déplace de réverbère en réverbère. Quand il se lance pour attraper le suivant, il a 80% de chances de ne pas tomber. Pour gagner le bistrot convoité, il faut en franchir 7. On notera X le nombre de réverbères atteints sans chute.
(a) Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire X ?
(b) Préciser sa loi.

(b) Quand il sort du café, son étape suivante est l'arrêt de bus. Le nombre de chutes pour y parvenir, noté Y , suit une loi de Poisson P(4). Calculer la probabilité de faire au plus deux chutes.

(c) Arrivé dans l'ascenseur, il appuie au hasard sur un des huit boutons. S'il atteint son étage ou s'il déclenche l'alarme, il sort de l'ascenseur, sinon il réappuie au hasard sur un des huit boutons. Soit Z le nombre de boutons pressés avant d'atteindre son étage ou de déclencher l'alarme.
(a) Quelle est la loi de Z ?
(b) Donner son espérance et sa variance.

43. **Rat et labyrinthe** *Contrôle terminal (session 2) 2015*
Le temps T nécessaire à un rat pour parcourir un labyrinthe est une variable aléatoire dont la distribution de probabilité est donnée par :

t (en secondes)	2	3	4	5	6	7
$P(T = t)$	0,1	0,1	0,3	p_5	0,2	0,1

(a) Calculer $p_5 = P(T = 5)$.

(b) Calculer le temps moyen, la variance, l'écart-type.

(c) Le rat est récompensé à l'aide d'un biscuit pour chaque seconde économisée sur un temps de parcours de 6 secondes (par exemple, s'il met 4 secondes, il reçoit 2 biscuits, mais, s'il met 6 secondes ou plus, il ne reçoit rien). Tabuler la loi de probabilité de la variable Récompense R, égale au nombre de biscuits reçus. Calculer la récompense moyenne du rat, ainsi que la variance et l'écart-type de R.

(d) Supposons que le rat soit puni par un choc électrique dont la "puissance" augmente fortement avec le temps mis à parcourir le labyrinthe, soit un choc de T^2 volts pour un temps de T secondes. Calculer la punition moyenne du rat.

(e) Reprendre la question précédente en supposant que la punition soit un choc électrique dont la puissance varie avec le temps selon la formule $P = 10T + 5$ (la "puissance" du choc électrique est exprimée en volts). Calculer la punition moyenne ainsi que $Var(P)$.

44. **Central d'appel** *Contrôle terminal (session 2) 2015*
Une secrétaire donne n appels téléphoniques (n est fixé). A chacun de ces appels, la probabilité qu'elle parvienne à joindre son correspondant est π ($\pi \in]0,1[$ est fixé). On suppose que les résultats de tous ces appels sont indépendants.
Après cette première série d'essais, elle tente, le lendemain de rappeler les correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre. Les hypothèses sur ses chances de résussite sont les mêmes. On note X le nombre de personnes jointes dès le premier jour et Y le nombre de personnes jointes l'un ou l'autre jour.

   (a) Quelle est la loi de X ?
   (b) Pour $h \leq k \leq n$, que vaut $P(Y = k|X = h)$?
   (c) En déduire la loi de Y.
   (d) Quelle est la probabilité qu'une personne ne soit pas jointe 2 jours successifs. En déduire le résultat de la question 3 par un argument direct.

45. **Allergie** *Contrôle terminal (session 2) 2015*
On sait que la probabilité qu'une personne soit allergique à un certain médicament est égale à 10^{-3}. On s'intéresse à un échantillon de 1000 personnes. On appelle X la variable aléatoire dont la valeur est le nombre de personnes allergiques dans l'échantillon.

   (a) Déterminer, en la justifiant, la loi de probabilité de X.
   (b) En utilisant une approximation que l'on justifiera, calculer les probabilités des évènements suivants :
      i. Il y a exactement deux personnes allergiques dans l'échantillon.
      ii. Il y a au moins deux personnes allergiques dans l'échantillon.

3

Variables aléatoires continues

1. Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, des troupeaux sur la route, etc. Un autocar part de son entrepôt. On note X la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que la variable X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/100$. La densité de X s'écrit donc

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{\frac{x}{100}} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

   (a) Quelle est la probabilité qu'un car parcourt entre 50 et 150 km sans incidents?

   (b) Quelle est la probabilité qu'un car parcourt plus de 300 km sans incidents?

2. Une station essence est approvisionnée une fois par semaine. Une analyse statistique montre que le volume des ventes, en milliers de litres, est bien approché par une variable aléatoire de densité

$$p(x) = 5(1-x)^4 \mathbf{1}_{x \in]0,1[}$$

   quelle doit être la capacité du réservoir de la station pour que la probabilité de rupture de stock soit inférieure à 10^{-5}?

3. Supposons que X suive une loi uniforme sur $[0, 1]$ et définissons la variable aléatoire Y par $Y = X^2$. Y admet-elle une densité ? Si oui, quelle est-elle ?

4. Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ c'est à dire que la densité de Y est $f(y) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$. Soit $Z = [Y] + 1$ avec $[.]$ la partie entière. Quelle est la distribution de Z?

5. Soit une variable aléatoire X de densité $f(x) = c(1 - x^2)\mathbf{1}_{\{-1<x<1\}}$.

   (a) Déterminer c pour que f qoit bien une densité de probabilité.

   (b) Quelle est la fonction de répartition de X ?

   (c) Mêmes questions avec la densité $f(x) = c\sqrt{1 - x^2}\mathbf{1}_{\{-1<x<1\}}$. Indication : on pourra penser au changement de variable $x = \cos t$

6. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités continues f_X et f_Y. On pose $U = min(X, Y)$ et $V = max(X, Y)$.

   (a) Calculer les densités de U et V. On pourra s'intéresser aux fonctions de répartition.

   (b) On considère X_n des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Donner la loi de $Z = min(X_1, \cdots, X_n)$.

   (c) On considère n atomes radioactifs différents qui fissionnent selon une loi exponentielle, l'atome numéro i suivant une loi exponentielle de paramètre λ_i. On considère la variable aléatoire Y représentant le premier atome qui fissionne. Calculer la loi de Y.

7. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer l'espérance de $Y = U^2$.

8. Soit X une variable aléatoire de loi normale de moyenne 0 et de variance 1. Déterminer la loi de $\sigma X + \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$

9. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $\arcsin(U)$.

10. Soit X de loi normale de moyenne 0 et de variance 1. Déterminer la loi de $|X|$.

11. Soit X une variable aléatoire de densité $e^{-x} 1_{x>0}$, donner la densité de $Y = 1 + \sqrt{X}$.

12. Soit X de loi normale de moyenne 0 et de variance 1. Donner

    (a) La variance de X.

    (b) $E[X^4]$

    (c) La variance de $|X|$

13. La vitesse d'une molécule au sein d'un gaz homogène en état d'équilibre est une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = ax^2 \exp\left(-\frac{mx^2}{2kT}\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}\right),$$

    où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue et m la masse de la molécule. Déterminer a en fonction de ces paramètres.

14. **Loi log-normale** - Soit μ et σ deux réels, avec $\sigma > 0$. On dit que X suit une loi log-normale, ou de Galton, de paramètres (μ, σ^2), noté $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$, si $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Cette loi intervient lors de la multiplication d'un grand nombre de variables indépendantes et positives. En linguistique, elle sert à modéliser le nombre de mots dans une phrase.

    (a) Supposons que $X \sim \mathcal{LN}(0, 1)$. Exprimer sa fonction de répartition F à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centré réduite.

(b) En déduire que sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\ln^2 x}{2}} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

(c) Montrer que son espérance vaut $E[X] = \sqrt{e}$ et sa variance $Var(X) = e(e-1)$.

(d) Un tas de sable est composé de grains homogènes sphériques. La diamètre X d'un grain suit la loi $\mathcal{LN} - 0.5, 0.09)$, l'l'unité étant le millimètre. On passe le tas au crible d'un tamis dont les trous sont circulaires, de diamètre 0.5 mm. Quelle est la proportion de grains de sable passant à travers le tamis ?

15. **Quantile et variance** - Supposons que X suive une loi normale de moyenne 12 et de variance 4. Trouver la valeur q telle que $P(X > q) = 0.1$.
Indication pour le calcul : $\Phi(1.28) = 0.9$

16. Soit $X \sim \mathcal{N}(5, \sigma^2)$. Déterminer la variance σ^2 telle que $P(X > 9) = 0.2$ Indication pour le calcul : $\Phi(0.84) = 0.8$

17. **Approximation gaussienne** - Soit X le nombre de Pile obtenus en 400 lancers d'une pièce équilibrée.

    (a) Crâce à l'approximation normale, estimer $P(190 \leq X \leq 210)$.

    (b) Idem pour $P(210 \leq X \leq 220)$.

    (c) Reprendre les question précédentes pour une pièce biaisée où $P(Pile) = 0.51$.

18. **Surbooking** - Des études effectuées par une compagnie aérienne montrent qu'il y a une probabilité 0.05 qu'un passager ayant fait une réservation n'effectue pas le vol. Dès lors, elle vend toujours 94 billets pour ses avions à 90 places. On veut évaluer la probabilité qu'il y ait un problème à l'embarquement, c'est-à-dire qu'il y ait au plus 3 absents.

    (a) Estimer cette probabilité en utilisant l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale.

    (b) Comparer à la vraie valeur d'une part et à la valeur obtenue par l'approximation de Poisson d'autre part. Comment expliquez-vous que l'approximation gaussienne ne marche pas ici ?

19. **Sondage** - Deux candidats, Alice et Bob, sont en lice lors d'une élection. On note p la proportion d'électeurs pour Alice dans la population totale. Afin d'estimer p, on effectue un sondage (avec remise) auprès de n personnes. Notons X le nombre d'électeurs favorables à Alice dans cet échantillon.

    (a) Quele est la loi suivie par X?

    (b) Grâce à l'approximation normale, donner en fonction de n et p un intervalle où X a 95% de chances de se situer.

    (c) Donner un esitmateur naturel $\hat{p}$ de p. Quelle est sa moyenne?

    (d) Donner en fonction de n et p un intervalle où $\hat{p}$ a 95% de chances de se situer.

(e) Donner un majorant de $x(x-1)$ lorsque $x \in [0,1]$. En déduire une intervalle de confiance à 95% pour p.

(f) Quelle est la taille de cet intervalle lorsqu'on interroge 1000 personnes ?

(g) Combien de personnes faut-il interroger pour obtenir une estimation à plus ou moins 2%?

20. Fréquence cardiaque *Contrôle terminal 2015*
La fréquence cardiaque chez un adulte en bonne santé est en moyenne de 70 pulsations par minute, avec un écart-type de 10 pulsations. Soit X la variable aléatoire représentant la fréquence cardiaque chez un adulte.

(a) A l'aide de l'inégalité de Chebychev, minorer $P(50 < X < 90)$

(b) Si on suppose maintenant que X suit une loi normale, que vaut $P(50 < X < 90)$?

21. Loi de Gumbel *Contrôle terminal 2015*

(a) On considère la fonction g definie pour tout réel x par $g(x) = e^{-e^{-x}}$. Calculer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$, sa dérivée et donner l'allure de g.

(b) Vérifier que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x-e^{-x}}$ est une densité.

(c) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Rappeler ce que vaut sa fonction de répartition F de X. Donner son allure.

(d) Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1, et soit $M = \max(X_1, X_2)$ la variable aléatoire correspondant au maximum de ces deux variables. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $P(M \leq x) = (1-e^{-x})^2$. En déduire la densité de M.
Indication : On remarque que si $M < x$ alors $X_1 < x$ et $X_2 < x$.

(e) On note maintenant $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$, où $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout réel $x \geq 0$, calculer $F_n(x) = P(M_n \leq x)$.

(f) Soit u un réel fixé, que vaut $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{u}{n})^n$? En déduire que pour tout réel x

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x + \ln n) = g(x).$$

4

Loi des grands nombres

1. On suppose que le nombre de pièces sortant d'une usine donnée en l'espace d'une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.
   (a) Majorer la probabilité que la production de la semaine prochaine dépasse 75 pièces ;
   (b) On sait de plus que la variance de la production hebdomadaire est de 25. Peut-on majorer la probabilité que la production de la semaine prochaine soit comprise entre 40 et 60 pièces?
2. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, \cdots, 9\}$.
   (a) Calculer son espérance et sa variance.
   (b) Majorez la quantité $P(|X-5| > 4$. Que vaut en fait cette probablité?
3. On lance 10 fois une pièce équilibrée. Majorez la probabilité d'avoir moins de 2 piles ou moins de 2 faces. Que vaut réellement cette probabilité?
4. Sondage - Une population de personnes présente une propriété donnée avec une proportion inconnue $p \in]0,1[$. On choisit un échantillon de n personnes et l'on pose $X_i = 1$ si le i-ème individu présente la propriété étudiée, 0 sinon. On considère que les variables aléatoires X_i ainsi définies sont indépendantes et suivent une loi de Bernoulli de paramètre p.
   (a) Quelle est la loi suivie par $S_n = X_1 + \cdots + X_n$?
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de S_n/n.
   (c) Soit $\epsilon > 0$. Etablir
   $$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$$
   (d) Pour $\epsilon = 0.05$, quelle valeur de n choisir pour que S_n/n soit voisin de p à ϵ près avec une probabilité supérieure à 95%?
5. Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de varaince σ^2 . Montrer que
   $$P(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

6. Que dit la loi forte des grands nombres sur la moyenne des résultats obtenus en lançant un même dé un grand nombre de fois ?

7. Let $X_1, X_2, \cdots,$

   denote an iid sequence of random variables, each with expected value 75 and standard deviation 15.

   (a) How many samples n do we need to guarantee that the sample mean $M_n(X)$ is between 74 and 76 with probability 0.99?

   (b) If each X_i has a Gaussian distribution, how many samples n' would we need to guarantee $M_{n'}(X)$ is between 74 and 76 with probability 0.99?

8. La durée de vie d'une ampoule électrique peut être modélisée par une variable aléatoire X prenant au hasard ses valeurs dans l'intervalle $[0, \theta]$ avec $\theta > 0$. Afin d'optimiser l'agenda d'un réparateur, on cherche à estimer θ à partir d'un n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ de même loi que X. On propose d'estimer θ par $\hat{\theta} = 2\bar{X}_n$.

   (a) Calculer l'espérance puis la variance de $\hat{\theta}$

   (b) En déduire que $P\left(\left|\hat{\theta} - \theta\right| > \epsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

9. Dans une usine de confection, 5 machines sont nécessaires pour fabriquer une chaussure. Dès que l'une d'elles tombe en panne, la chaîne doit être arrêtée. On modélise la durée de vie (en jours) de ces machines par des variables aléatoires $T_1 \cdots, T_5$ indépendantes, de loi géométrique de paramètres $p_1, \cdots, p_5$. On note T le temps avant le premier arrêt de la chaîne causé par une panne.

   (a) Que représentent $p_1, \cdots, p_5$? Pourquoi ce modèle de durée de vie peut-il être considéré "sans usure"?

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $P(T_1 > n)$, puis $P(\min(T_1, T_2) > n$ et $P(T > n)$.

   (c) En déduire la loi de T. Que vaut $E[T]$?

10. On considère une suite de lancers indépendants de pièces équilibrées. On note $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires décrivant les résultats $P(X_n = P) = P(X_n = F) = 1/2$ et les X_n sont indépendantes.

    (a) Appliquer la loi des grands nombres pour montrer que la proportion de Pile parmi les n premiers lancers converge vers $1/2$ (en probabilité) lorsque n tend vers $+\infty$.

    (b) Quelle est la probilité qu'il n'y ait qu'un nombre fini de Pile dans la suite de lancers.

    (c) Qulle est la probailité que la séquence "PPFFPP"apparaisse une infinité de fois?

11. Revenons au jeu de loterie qui consiste à tirer, indépendamment et avec remise, des tickets d'une boîte. Il y a en tout 4 tickets, numérotés respectivement -2, -1, 0, 3. Votre "gain" X lors d'une partie correspond à la somme indiquée sur le ticket. Par

exemple, si vous tirez le ticket numéroté -2, alors $X = -2$ et vous devez donner 2 euros, tandis que si vous tirez le ticket 3, alors $X = 3$ et vous gagnez 3 euros. Vous jouez N fois de suite.

(a) Quelle est votre espérance de gain si vous jouez un nombre de parties qui tend vers l'infini?

(b) Quelle chance avez-vous, au maximum, que votre gain soit supérieur à 10 après 5 parties?

12. **Un accès internet**
Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. A un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

(a) On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type?

(b) On pose $Y = (X - 1000)/\sqrt{800}$. Justifier précisément qu'on peut approcher la loi de Y par la loi de Gauss de moyenne 0 et de variance 1.

(c) Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à 2,5%. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.