

Statistiques
Master Statistique et économétrie
TD - Feuille n° 1

V. Monbet

Master 1 - 2012

Exercice 1

Un fumeur impénitent décide d'essayer de ne plus fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut 0,3. Par contre, s'il succombe un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain vaut 0,9.

1. Quelle est la probabilité que cette personne ne fume pas le n ème jour?
2. Que se passe-t-il lorsque n est grand ?

Exercice 2

Une banque accepte des rouleaux de pièces de 1 cent et donne 50 cents au client sans compter les pièces. Supposons que dans 30% des cas le rouleau contient seulement 49 pièces, qu'il en contient 50 dans 60 % des cas et 51 dans 10%.

1. Trouver la moyenne et la variance du montant que la banque perd sur un rouleau donné.
2. Approcher la probabilité que la banque perde plus de 25 cents sur 100 rouleaux indépendants.
3. Approcher la probabilité que la banque perde exactement 25 cents sur 100 rouleaux indépendants.
4. Approcher la probabilité que la banque perde de l'argent sur 100 rouleaux indépendants.
5. Combien de rouleaux la banque doit-elle collecter pour avoir 99% de chance d'avoir une perte positive?

Exercice 3

Contre une mise d'un montant de M euros, on lance un dé dont les 6 faces sont marquées : As, Roi, Dame, Valet, 10 et 9. Selon le résultat du lancer, le joueur gagne les sommes suivantes (en euros) :

As	Roi, Dame	Valet	10,9
10	6	5	0

On note X la variable aléatoire "gain lors d'un lancer" (sans tenir compte de la mise de départ).

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Représenter cette loi de probabilité à l'aide d'un graphique.
2. Rappeler la définition générale de la fonction de répartition. Calculer et tracer la fonction de répartition.
3. Quelle est la probabilité d'avoir un gain supérieur ou égal à 5 euros?
4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
5. On dit que le jeu est équilibré lorsque le gain moyen lors d'un lancer est nul (en prenant en compte la mise initiale). Comment doit être choisie la mise pour que le jeu soit équilibré?

Exercice 4

Soit une X variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ 1 - |x| & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter la fonction f à l'aide d'un graphe.
2. Vérifier que f définit bien une densité.
3. Déterminer la fonction de répartition F de X et représenter cette fonction à l'aide d'un graphe.
4. Calculer les quantités suivantes : $P(X < 0)$, $P(X > -\frac{3}{4})$ et $P(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$.
5. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 5

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y dont les moments d'ordre 1 et 2 sont connus. On définit les variables aléatoires :

$$A = 2X + 3Y \text{ et } B = X - Y$$

1. Calculer $E(A)$, $E(B)$ et $E(A - B)$.
2. Calculer $Var(A)$, $Var(B)$ et $Cov(A, B)$.

Exercice 6

Le nombre X d'électrons émis par un corps radioactif durant une période donnée suit une loi de Poisson de paramètre :

Chacun des électrons, indépendamment des autres, a une probabilité p d'avoir un effet biologique ($0 < p < 1$). On note Z le nombre d'électrons ayant un effet biologique, émis par l'élément radioactif (durant la période donnée).

1. Quelle est la probabilité que, parmi n électrons émis durant la période donnée, k aient un effet biologique ; autrement dit, quelle est l'expression de $P(Z = k | X = n)$?
2. En déduire la loi de Z .

Exercice 7

Une variable aléatoire X suit une loi de Gauss de moyenne 5 et de variance 9. Calculer les probabilités des événements suivants :

1. X inférieur à 8
2. X supérieur à 2
3. X compris entre -1 et 11
4. X extérieur à l'intervalle $(-4, 14)$

Exercice 8

Supposons que X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires i.i.d. de loi Gamma dont le paramètre de forme α et le paramètre d'échelle λ sont inconnus. La densité de probabilité de la loi Gamma s'écrit :

$$f(x; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} \text{ pour } x \geq 0$$

1. Donner la loi jointe du vecteur (X_1, \dots, X_n) .
2. Montrer que la loi Gamma est une loi de la famille exponentielle. Indiquer le nombre de paramètres de la famille exponentielle. Donner l'ensemble de définition de (X_1, \dots, X_n) .

Exercice 9

Supposons que X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi Poisson telles que

$$E(X_i) = \exp(\alpha + \beta t_i)$$

avec t_1, \dots, t_n des constantes connues.

1. Calculer la moyenne d'une loi de Poisson de paramètre λ .
2. Donner la loi de X_1 .
3. Donner la loi jointe du vecteur (X_1, \dots, X_n) .
4. Montrer que la loi obtenue à la question précédente est une loi de la famille exponentielle.

On rappelle que la loi de Poisson de paramètre λ est donnée par :

$$f(x; \lambda) = P_\lambda(X = x) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!} \text{ pour } x \in \mathbb{N}$$

Exercice 10

Supposons que X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires i.i.d. de moyenne μ . On rappelle que le biais d'un estimateur $\hat{\theta}$ de θ est défini de la façon suivante :

$$b_\theta(\hat{\theta}) = E_\theta(\hat{\theta} - \theta)$$

Montrer que

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

est un estimateur non biaisé de μ .

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim F_\theta$ et soit $\hat{\theta}$ un estimateur de θ . Montrer que

$$\text{EMQ} = \text{Var}_\theta(\hat{\theta}) + b_\theta(\hat{\theta})^2$$

Exercice 12

Supposons que X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires i.i.d. de loi Gauss de moyenne μ et de variance σ^2 .

1. Montrer que

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ avec } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

est un estimateur sans biais de σ^2 .

2. Rappeler quelle est la loi de la variable aléatoire

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

3. Calculer $E_\sigma(S)$.

4. En déduire que S est un estimateur biaisé de σ . On remarque que ce biais tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Remarque - On retiendra de cet exercice, que le fait qu'un estimateur soit sans biais n'est pas toujours une notion primordiale tant que le biais est faible et tend vers 0.

Exercice 13

Supposons que X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires i.i.d. de moyenne μ et de variance σ^2 . Montrer que

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ avec } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

est un estimateur consistant pour σ^2 .

Indication - On peut utiliser le *lemme de Slutsky*.

Exercice 14

Supposons que X_1, \dots, X_n sont des variables i.i.d. de loi uniforme sur $[0, \theta]$. Et choisissons $\hat{\theta} = \max_{i=1, \dots, n} X_i$. Montrer que la densité de $\hat{\theta}$ est

$$f(x; \theta) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \text{ pour } 0 \leq x \leq \theta$$