Statistiques
Master Statistique et econométrie
Exercices Mise à Niveau- Feuille n^o 1

V. Monbet

Master 1 - 2012

Exercice 1

Lors du contrôle d'une chaîne de médicaments, on s'intéresse au nombre de comprimés défecteux dans un lot. Les tests effectués sur 20 lots choisis au hasard ont donné les résultats suivants :

1	0	0	3	2	0	5	2	0	0	1	2	1	3	0	1	0	0	2	7

On suppose que ces observations sont des réalisations de variables i.i.d. de loi de probabilité inconnue d'espérance μ et de variance σ^2.

1. On considère quatre estimateurs pour μ :
   - $T_1 = X_1$
   - $T_2 = \frac{X_1+X_2}{2}$
   - $T_3 = \frac{X_1+X_2}{3}$
   - $T_4 = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

   Calculer le biais et la variance de chacun de ces estimateurs. Quel est le meilleur estimateur? Quelle est l'estimation correspondante?

2. Proposer un estimateur de σ^2 et calculer l'estimation correspondante.

3. Proposer un estimateur de la proportion de lots qui contiennent au moins un comprimé défectueux et calculer l'estimation correspondante.

Exercice 2

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d d'une loi d'espérance μ et de variance σ^2.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les constantes $a_1, \cdots, a_n$ pour que $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ soit un estimateur sans biais de μ.

2. Parmi les estimateurs de μ de la forme $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ quel est celui de variance minimale? Quel est le biais de cet estimateur?

3. Parmi les estimateurs de μ de la forme $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ quel est celui dont l'erreur en moyenne quadratique est minimale?

4. Parmi les estimateurs sans biais de μ de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ quel est celui dont la variance est minimale?

Exercice 3

On a observé les durées de vie (en millier d'heures) de 30 composants électroniques. les résultats sont les suivants :

0.1 ; 7.4 ; 1.0 ; 7.9 ; 2.1 ; 1.8 ; 17.9 ; 9.3 ; 6.5 ; 3.3 ; 5.6 ; 7.7 ; 0.1 ; 24.3 ; 8.1 ; 10.0; 11.9 ; 1.6 ; 2.7 ; 0.5 ; 5.6 ; 42.5 ; 5.2 ; 2.0 ; 0.2 ; 15.0 ; 3.5 ; 6.4 ; 0.6 ; 3.3

On admet que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 223.5$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3826.8$. On suppose que la durée de vie des composants électroniques suit une loi exponentielle de paramètre inconnu $\theta > 0$. On rappelle que la densité de cette loi est donnée par :

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \exp(-\frac{x}{\theta}) \text{ pour } x \geq 0, \; 0 \text{ sinon}$$

1. Proposer un estimateur T de θ par la méthode des moments. Donner l'estimation correspondante.
2. Calculer le biais et l'erreur en moyenne quadratique de T.

Exercice 4

Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de loi de Bernouilli de paramètre $\pi \in]0, 1[$ inconnu.

1. Ecrire la loi de X_1. Quelle est son espérance? Sa variance?
2. Donner un estimateur $\hat{\pi}$ de π par la méthode des moments.
3. Calculer le biais et l'erreur en moyenne quadratique de $\hat{\pi}$.

Exercice 5

Nous disposons d'un échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$ de moi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ inconnu. Rappelons que pour tout $k \in \mathcal{N}$,

$$P(X_A = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

1. Rappeler les valeurs de la moyenne et la variance de X_1
2. Proposer deux estimateurs $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ de λ obtenus par la méthode des moments.

Exercice 6

Des insomniaques avaient une durée de sommeil médiane de 2 heures par nuit avant d'être traités par un nouveau médicament. On sait que si ce médicament agit, ce ne peut être qu'en augmentant la durée de sommeil, mais de nombreux médecins doutent qu'il agisse réellement. Leurs doutes sont-ils justifiés si nos insomniaques, après avoir pris le médicament, ont les durées de sommeil nocturne suivantes :

3.1	1.8	2.7	2.4	2.9	0.2	3.7	5.1	8.3	2.1	2.4

Exercice 7

Dans un petit sondage d'opinion pilote, 18 électeurs d'une circonscription ont été choisis au hasard, et on leur a demandé s'ils pensaient que le Premier Ministre faisait du bon travail. Six ont répondu 'oui' et 12 'non'. Est-ce une présomption suffisante pour rejeter l'hypothèse que 50% de l'électorat pense que le ministre fait du bon travail?

Exercice 8

Une machine automatique fabrique des comprimés de poids moyen 500 mg avec un écart-type de 11,8 mg. Afin de vérifier si la machine ne se dérègle pas, on prélève régulièrement des échantillons de 40 comprimés et l'on contrôle le poids moyen (l'écart-type est supposé constant). Lors d'un de ces contrôles, la moyenne du poids est évaluée 503 mg.

Peut-on dire que la machine est déréglée?

Exercice 9

La teneur en hémoglobine du sang des femmes non malades a pour valeur moyenne 14,5 g/100mL, et pour écart-type 1,1 g/100mL, qu'on supposera constant quelle que soit la population étudiée. Ce paramètre biologique suit une loi normale. Sur un échantillon de 20 femmes on trouve on obtient les résultats suivants :

12.3	14.5	15.5	13.0	14.7	15.1	12.0	12.2	14.4	13.3
14.5	14.6	14.5	15.2	14.5	15.1	12.4	13.7	13.6	12.0

1. Au risque de 5% peut-on conclure que la population de femmes dont est extrait cet échantillon présente une teneur en hémoglobine trop faible?
2. Quel résultat obtient-on si on ne suppose plus que la variable étudiée suit une loi de Gauss?

Loi binomiale

$X \sim \mathcal{B}(n, \pi)$, $\pi = 1/2$, $P(X = k)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
n=6	0.015	0.094	0.234	0.312	0.234	0.094	0.016							
n=7	0.008	0.055	0.164	0.273	0.273	0.164	0.055	0.008						
n = 8	0.004	0.031	0.109	0.219	0.273	0.219	0.109	0.031	0.004					
n = 9	0.002	0.018	0.070	0.164	0.246	0.246	0.164	0.070	0.018	0.002				
n=10	0.001	0.010	0.044	0.117	0.205	0.246	0.205	0.117	0.044	0.010	0.001			
n=11	0.000	0.005	0.027	0.081	0.161	0.226	0.226	0.161	0.081	0.027	0.005	0.000		
n=12	0.000	0.003	0.016	0.054	0.121	0.193	0.226	0.193	0.121	0.054	0.016	0.003	0.000	
n=13	0.000	0.002	0.010	0.035	0.087	0.157	0.209	0.209	0.157	0.087	0.035	0.010	0.002	...
n = 14	0.000	0.001	0.006	0.022	0.061	0.122	0.183	0.209	0.183	0.122	0.061	0.022	0.006	...
n=15	0.000	0.000	0.003	0.014	0.042	0.092	0.153	0.196	0.196	0.153	0.092	0.042	0.014	...
n=16	0.000	0.000	0.002	0.009	0.028	0.067	0.122	0.175	0.196	0.175	0.122	0.067	0.028	...
n=17	0.000	0.000	0.001	0.005	0.018	0.047	0.094	0.148	0.185	0.185	0.148	0.094	0.047	...
n=18	0.000	0.000	0.001	0.003	0.012	0.033	0.071	0.121	0.167	0.185	0.167	0.121	0.071	...
n=19	0.000	0.000	0.000	0.002	0.007	0.022	0.052	0.096	0.144	0.176	0.176	0.144	0.096	...
n=20	0.000	0.000	0.000	0.001	0.005	0.015	0.037	0.074	0.120	0.160	0.176	0.160	0.120	...

Si $n > 20$, on approche la loi binomiale par une loi de Gauss de moyenne $n\pi$ et de variance $n\pi(1-\pi)$.

$X \sim \mathcal{B}(n, \pi)$, $\pi = 1/4$, $P(X = k)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n=6	0.178	0.356	0.297	0.132	0.033	0.004	0.000						
n=7	0.133	0.311	0.311	0.173	0.058	0.012	0.001	0.000					
n = 8	0.100	0.267	0.311	0.208	0.087	0.023	0.004	0.000	0.000				
n = 9	0.075	0.225	0.300	0.234	0.117	0.039	0.009	0.001	0.000	0.000			
n=10	0.056	0.188	0.282	0.250	0.146	0.058	0.016	0.003	0.000	0.000	0.000		
n=11	0.042	0.155	0.258	0.258	0.172	0.080	0.027	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	
n=12	0.032	0.127	0.232	0.258	0.194	0.103	0.040	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000

Loi de Gauss centrée réduite

$$\Pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{et} \quad \Pi(-t) = 1 - \Pi(t).$$

t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000