Statistique Inférentielle
Master 1 Statistique et econométrie
Devoir Maison n^o 1

Exercice 1

Soit $(\mathbb{R}_+^n, \{Q_\theta^{\otimes n}\}_{\theta>0})$ un modèle statistique tel que pour chaque $\theta > 0$, Q_θ est la loi sur $\mathbb{R}_+$ de densité

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}\mathbf{1}_{]0,\theta]}(x).$$

Le paramère d'intérêt est le paramètre de ce modèle. Dans la suite, on note $(X_1, \cdots, X_n)$ suit la loi $Q_\theta^{\otimes n}$ et $\hat{\theta}_1 = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

1. Calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_1$ et en déduire sa densité.
2. Montrer que $\hat{\theta}_1$ est biaisé, mais asymptotiquement sans biais.
3. Calculer l'espérance de X_1 et en déduire un autre estimateur $\hat{\theta}_2$ de θ, qui est sans biais.
4. Déterminer les erreurs en moyenne quadratique de $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$. Lequel est préférable? Sont-ils consistants?
5. Donner les lois limites de $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$.

Exercice 2

Une compagnie d'assurance vend à chacun de ses clients un produit constitué de deux contrats A et B, chacun d'une durée d'un an, et portant sur des risques indépendants. Le bénéfique algébrique réalisé au terme de chacun de ces types de contrats suit une loi normale dont seule la moyenne dépend du type de contrat. A la fin de l'année, la compagnie d'assurance a relevé son bénéfice algébrique sur un échantillon de n clients indépendants.

1. Notons X le bénéfice. Justifier l'écriture suivante
$$X_i = \mu_A + \mu_B + 2\epsilon_i$$
avec μ_A et μ_B les moyennes pour les deux contrats et ϵ une variable aléatoire de loi de Gauss de moyenne 0 et de variance 1.
2. Déterminer le modèle statistique associé à cette expérience. Le modèle est-il identifiable?