Analyse de données
M1 Statistique et économétrie - 2013-2014
V. Monbet
Rappels d'algèbre linéaire

L'objectif de ce TD est de se remettre en tête les propriétés des applications linéaires et des matrices.

Les exercices sont à faire à la maison en s'aidant d'un livre ou d'un cours d'algèbre linéaire. on Pourra par exemple utiliser le cours de J.-F. Durand intitulé "Eléments de Calcul Matriciel et d'Analyse Factorielle de Données".
(`http:`). Les exercices de cette fiche sont tirés de ce cours.
Si ça vous aide, vous pouvez utiliser un ou plusieurs logiciels de votre choix pour faire les calculs. Mais vos réponses devront être justifiées.

A rendre le 20 janvier 2014.

Exercice 1, Applications linéaires

Dans l'espace $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.

1. Soit $D = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ une base de E et soit g une application linéaire de E dans lui-même (on dit un endomorphisme de E) ayant pour matrice N dans la base D : (a, b, c et d désignent des réels quelconques)

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   On notera Img l'image de g et $Kerg$ son noyau.

   (a) Calculer le rang de g ainsi que la dimension de $Kerg$.

   (b) Donner une base pour Img.

   (c) Soient $v_1 = au_1 + cu_2 - u_3$, $v_2 = bu_1 + du_2 - u_4$. Démontrer que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $Kerg$.

2. Soit $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de E. On pose

$$c_1 = e_2 + 2e_3 + 2e_4$$

$$c_2 = e_1 + e_2 + 2e_3 + 3e_4$$

$$c_3 = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 + 3e_4$$

$$c_4 = 2e_1 + 3e_2 + 3e_3 + 3e_4$$

   (a) Démontrer que $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ est une base de E.

(b) Ecrire la matrice de passage P de B à C et calculer son inverse (avec `R`, fonction `solve`).

(c) Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$f(e_1) = -e_1 - 3e_2 - 6e_3 - 7e_4$$
$$f(e_2) = 2e_1 + 5e_2 + 10e_3 + 12e_4$$
$$f(e_3) = -3e_1 - 5e_2 - 10e_3 - 13e_4$$
$$f(e_4) = 2e_1 + 3e_2 + 6e_3 + 8e_4$$

Calculer la matrice M de f dans la base B puis la matrice M' de f dans la base C.

(d) Soit V le sous espace vectoriel de E engendré par c_1 et c_2. Soit q la projection de E sur V. Calculer Q la matrice de q dans la base B.

Exercice 2, Matrice inversible

Soit $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de $\mathbb{R}^4$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ et sa matrice $A_{f,B}$ associée dans la base B

$$A_{f,B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de f (avec `R`, fonction `eigen`).
2. Pour chaque valeur propre λ de f, déterminer l'espace propre correspondant.
3. Déduire que f est diagonalisable.
4. Trouver en l'exprimant dans la base B, une base $C = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ avec $A_{f,C}$ diagonale et préciser quelle est la matrice $A_{f,C}$.

Exercice 3, projection

1. Calculer la matrice de projection Q sur le sous espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 1, 0, 2)$ et $(-1, 0, 0, 1)$. Donner la projection de $x = (0, 2, 5, -1)$ sur le sous espace.
2. Calculer la projection de $v = (1, 1, 0)$ sur le plan $x + y - z = 0$.

Exercice 4, décomposition en valeurs singulières

Soit la matrice

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Calculer la décomposition en valeurs singulières de X (avec `R`, fonction `svd`)
2. Quel est le rang de X ? Expliciter le noyau de X. Ecrire la matrice de projection orthogonale sur $KerX$, puis le vecteur de projection de $y = (1, 1, 1)^T$ sur $KerX$.
3. Donner l'expression de la matrice de la projection orthogonale sur ImX, puis le vecteur projection de y sur ImX.