Algèbre commutative et géométrie algébrique

Controle continu n° 2, 14 avril 2023

Vous disposez de **2 heures** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées**. Cet énoncé comporte 1 page et 5 exercices.

Exercice 1 Soit $p \in \mathbf{Z}$ un nombre premier et $\mathbf{Z}_{(p)}$ la localisation de $\mathbf{Z}$ par rapport au complémentaire de l'idéal premier (p).

(i) Décriver sans démonstration l'idéal maximal et le groupe des inversibles $\mathbf{Z}_{(p)}^\times$ de $\mathbf{Z}_{(p)}$.

(ii) Montrer que l'on a un morphisme d'anneaux injectif $f : \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{Q}$ d'image $\{g/h \in \mathbf{Q} : \mathrm{pgcd}(g,h) = 1 \text{ et } p \nmid h\}$. Quel est l'image de l'idéal maximal et de $\mathbf{Z}_{(p)}^\times$ par f ?

(iii) Soit $q \neq p$ un nombre premier différent de p. Montrer qu'il n'existe pas d'isomorphisme d'anneaux entre $\mathbf{Z}_{(p)}$ et $\mathbf{Z}_{(q)}$. Indication : On pourra comparer l'image de p dans ces deux anneaux.

Solution : (i) L'idéal maximal de $\mathbf{Z}_{(p)}$ est $p\mathbf{Z}_{(p)}$. On a $\mathbf{Z}_{(p)}^\times = \mathbf{Z}_{(p)} \setminus p\mathbf{Z}_{(p)}$ comme $\mathbf{Z}_{(p)}$ est local.

(ii) La propriété universelle appliqué au morphisme d'inclusion $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ nous donne un morphisme $f : \mathbf{Z}_{(p)} \to \mathbf{Q}$. Soit S le complémentaire de (p). Par construction, $f(a/s) = \frac{a}{s}$. Si $\frac{a}{s} = 0$, alors $a = 0$ et $a/s = 0$, donc f est injective. Son image sont les fractions irréductibles $\frac{a}{s}$ avec $s \notin (p)$, c.à.d. $p \nmid s$. L'image $f(p\mathbf{Z}_{(p)}) = pf(\mathbf{Z}_{(p)})$ est formé par les fractions $\frac{a}{s}$ avec $p \mid a$ et $p \nmid s$. L'image de $\mathbf{Z}_{(p)} \setminus p\mathbf{Z}_{(p)}$ est formé par des fractions $\frac{a}{s}$ avec $p \nmid a$ et $p \nmid s$.

(iii) Supposons, pour une contradiction, qu'il existe un isomorphisme φ entre $\mathbf{Z}_{(p)}$ et $\mathbf{Z}_{(q)}$. Comme φ est additif, l'image de $p/1 \in \mathbf{Z}_{(p)}$ par φ est l'image de p dans $\mathbf{Z}_{(q)}$. Comme φ est multiplicatif, il induit un isomorphisme de groupes entre $\mathbf{Z}_{(p)}^\times$ et $\mathbf{Z}_{(q)}^\times$. Mais $p/1 \in \mathbf{Z}_{(p)}$ n'est pas inversible pourtant que l'image de p dans $\mathbf{Z}_{(q)}$ est inversible. Contradiction.

Exercice 2 Soit k un corps. On écrira $\mathbf{A}$ pour $\mathbf{A}(k)$. Soient $M_n(k) = \mathbf{A}^{n^2}$ l'espace affine sur k des matrices carrées de taille n et $T_n(k) \subset M_n(k)$ les matrices diagonales.

(i) Montrer que le déterminant $M \mapsto \det(M)$ est une application polynomiale $M_n(k) \to M_1(k)$. En déduire que les matrices inversibles $GL_n(k)$ forment un Zariski ouvert dans $M_n(k)$.

(ii) Soit $V := \det^{-1}(0) \cap T_n(k)$. Montrer que V est un sous-ensemble algébrique de $M_n(k)$.

(iii) Montrer qu'il existe une immersion fermée $V \to \mathbf{A}^n$ tel que $I(V) = (X_1X_2\cdots X_n)$ et $k[V] \simeq k[X_1,...,X_n]/(X_1X_2\cdots X_n)$. En déduire que V n'est pas irréductible si $n \geq 2$.

Solution : (i) On notes les variables sur $M_n(k) = \mathbf{A}^{n^2}$ par X_{ij} pour $1 \leq i,j \leq n$. D'après la formule de Leibniz, l'application $M \mapsto \det(M)$ est donné par le polynôme $\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) X_{1\sigma(1)} \cdots X_{n\sigma(n)}$ dans $k[X_{11},....,X_{nn}]$. Par définition, l'application est polynomiale. Elle est donc continue pour les topologies de Zariski. L'image réciproque $GL_n(k)$ de $\{P \in \mathbf{A}^1 : P \neq 0\}$ est donc ouvert dans $\mathbf{A}^{n^2}$.

(ii) Comme det est polynomiale et $\{0\} = V(X) \in \mathbf{A}^1$ est fermé, $\det^{-1}(0)$ est fermé, donc un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{A}^{n^2}$. Egalement, $T_n(k) = V(S)$ pour $S = \{X_{ij}\}_{i \neq j}$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{A}^{n^2}$. Donc l'intersection V l'est aussi.

(iii) On note $X_i := X_{ii}$ pour $i = 1,...,n$, comme variables sur $\mathbf{A}^n$. L'application $T_n(k) \to \mathbf{A}^n, M \to (M_{ii})_{1\leq i\leq n}$ est un isomorphisme entre les deux ensembles algébriques, ce qui induit par restriction une immersion fermée $V \to \mathbf{A}^n$. On point $P = (p_1,...,p_n) \in \mathbf{A}^n$ est dans V si et seulement si $p_1 \cdots p_n = 0$. Donc $V = V(X_1X_2\cdots X_n)$ et $I(V) = \sqrt{(X_1X_2\cdots X_n)}$ par le théorème des zéros. Il reste à remarquer que

$$\sqrt{(X_1X_2\cdots X_n)} = (X_1X_2\cdots X_n).$$

Effectivement, si $f^k \in (X_1X_2\cdots X_n) \subset (X_i)$, alors $X_i \mid f^k$ et donc $X_i \mid f$, car X_i est irréductible dans l'anneau factoriel $k[X_1,...,X_n]$. Comme les X_i sont deux à deux non associés, la décomposition en facteurs irréductibles de f montre donc que $X_1X_2\cdots X_n \mid f$, c.à.d. $f \in (X_1X_2\cdots X_n)$. Finalement, $k[V] = k[X_1,...,x_n]/I(V) = k[X_1,...,X_n]/(X_1X_2\cdots X_n)$ n'est pas intègre, et V n'est pas irréductible, si $n \geq 2$.

Exercice 3 Soit k un corps infini. On écrira $\mathbf{A}$ pour $\mathbf{A}(k)$. Soit $V \subset \mathbf{A}^n$ un ensemble algébrique irréductible. Soit $g \in k[V]$ non nul et $D(g) := V \setminus V(g)$, un ouvert de V.

(i) Montrer que $I(V\times\mathbf{A}^1) \subset k[Y_1,...,Y_n,X]$ est l'idéal $I(V)k[Y_1,...,Y_n,X]$. En déduire que $k[V\times\mathbf{A}^1] \simeq k[V][X]$.

(ii) Soit $W := V(gX-1) \subset V\times\mathbf{A}^1$. Montrer que la projection $p : V\times\mathbf{A}^1 \to V$ induit une injection $W \to V$ avec image $D(g)$.

(iii) Montrer que $k[V][X]/(gX-1) \simeq k[V]_g$, la localisation de $k[V]$ à $S = \{1, g, g^2, ...\}$. Est-ce que cet anneau est isomorphe à $k[W]$?

Solution : (i) Un polynôme

$$F(Y_1,...,Y_n,X) = \sum_n f_n(Y_1,...,Y_n)X^n \in k[Y_1,...,Y_n][X]$$

s'annule sur $V\times\mathbf{A}^1$ si et seulement si $F(P,X) = 0$ pour tout $P \in V$, i.e. si et seulement si $f_n(P) = 0$ pour tout $P \in V$ (car k est infini). Cela implique que $f_n \in I(V)$ pour tout n et donc $F \in I(V)k[Y_1,...,Y_n,X]$. L'autre inclusion $I(V)k[Y_1,...,Y_n,X] \subset I(V\times\mathbf{A}^1)$ est evidente. Le morphisme de k-algèbres canonique surjectif

$$k[Y_1,...,Y_n,X] \to \big(k[Y_1,...,Y_n]/I(V)\big)[X] = k[V][X],$$

donné par $Y_i \mapsto Y_i \bmod I(V)$ et $X \mapsto X$ a comme noyau $I(V)k[Y_1,...,Y_n,X] = \{\sum_n f_n(Y_1,...,Y_n)X^n : f_n \in I(V)\}$. Donc

$$k[V\times\mathbf{A}^1] = k[Y_1,...,Y_n,X]/I(V\times\mathbf{A}^1) = k[Y_1,...,Y_n,X]/I(V)k[Y_1,...,Y_n,X] \simeq k[V][X].$$

(ii) Pour un point $P = (a_1,....,a_n,a) \in V\times\mathbf{A}^1$, on a $P \in W$ si et seulement si $g(a_1,....,a_n)a = 1$. Donc si et seulement si

$$g(a_1,....,a_n) \neq 0 \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{g(a_1,....,a_n)}.$$

Donc la restriction de p à W est bien injective avec l'image $\{Q \in V : g(Q) \neq 0\} = D(g)$.

(iii) Comme $g \in (k[V][X]/(gX-1))^*$, la propriété universelle de la localisation donne un morphisme $\varphi : k[V]_g \to k[V][X]/(gX-1)$. Réciproquement, la propriété universelle de l'anneau de polynômes $k[V][X]$ donne un morphisme $k[V][X] \to k[V]_g, X \mapsto 1/g$. Ce morphisme factorise à un morphisme $\psi : k[V][X]/(gX-1) \to k[V]_g$. Les deux applications φ et ψ sont mutuellement inverses l'une à l'autre.

Finalement, on a un isomorphisme

$$k[V][X]/(gX-1) \simeq k[W],$$

car $I_{V\times\mathbf{A}^1}(W) = (gX-1)$. Effectivement, $gX-1 \in I_{V\times\mathbf{A}^1}(W)$. Donc si $F \in I_{V\times\mathbf{A}^1}(W)$, on peut considérer son image h/g^k dans $k[V][X]/(gX-1) \simeq k[V]_g$, avec un élément $h \in k[V]$. Donc

$$h \in I_{V\times\mathbf{A}^1}(W) \cap k[V] \subset I(p(W)),$$

et donc h s'annule sur $p(W)$. Mais l'ouvert $p(W) = D(g)$ non vide (car $g \neq 0$) est dense dans V, car V est irréductible. Donc $h = 0$ et $F \in (gX - 1)$.

Exercice 4 Soit A un anneau local noethérien avec idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$. Soit J un idéal de A.

(i) Enoncer le lemme de Nakayama pour A et son idéal J.

(ii) Soit $I \subseteq J$ un autre idéal de A. Montrer que $J = \mathfrak{m}J + I$ implique $I = J$.

(iii) Soit $x_1, ..., x_n \in J$. Montrer que $x_1, ..., x_n$ sont des générateurs de l'ideal J, si leurs image dans $J/\mathfrak{m}J$ sont des générateurs du k-espace vectoriel $J/\mathfrak{m}J$.

Solution : (i) Cours.

(ii) Les idéaux de l'anneau $\overline{A} := A/I$ sont en bijection avec les idéaux de A contenant I. En particulier, $\overline{A}$ est un anneau local, avec l'idéal maximal $\overline{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m}/I$. Comme quotient de A, l'anneau $\overline{A}$ est noethérien. On peut donc appliquer le lemme de Nakayama à l'idéal $\overline{J} = J/I$ de $\overline{A}$: donc si $\overline{\mathfrak{m}}\overline{J} = \overline{J}$, alors $\overline{J} = 0$. Il reste à noter que l'hypothèse $\overline{\mathfrak{m}}\overline{J} = \overline{J}$ signifie $J = \mathfrak{m}J + I$.

(iii) Soit $I = (x_1, ..., x_n)$, un idéal de A contenu dans J. Supposons que les images des x_i dans $J/\mathfrak{m}J$ sont des générateurs du k-espace vectoriel $J/\mathfrak{m}J$. Cela implique $J = \mathfrak{m}J + I$. Par (ii), on en déduit $I = J$.

Exercice 5 Soit I un idéal tel que $V(I) \subset \mathbf{A}^n$ est un point $P = (p_1, ..., p_n)$.

(i) Montrer que $\sqrt{I} = I(P)$ comme idéaux de $k[X_1, ..., X_n]$.

(ii) En déduire qu'il existe $N > 0$ tel que $(X_i - p_i)^N \in I$ pour tout i.

(iii) En déduire que la k-dimension de l'anneau quotient $k[X_1, ..., X_n]/I$ est finie.

(iv) Déterminer la k-dimension de $k[X, Y]/I$ où $I = (Y - X^2, Y)$.

Solution : (i) Le théorème des zéros donne directement $\sqrt{I} = I(V(I)) = I(P)$, comme idéaux de $k[X_1, ..., X_n]$.

(ii) Soit $P = (p_1, ..., p_n)$. On sait que $I(P)$ est un idéal engendré par les éléments $X_i - p_i$ pour $i = 1, ..., n$. Par (i), $X_i - p_i \in \sqrt{I}$, ce qui implique $(X_i - p_i)^{N_i} \in I$ pour un $N_i > 0$. On pourra donc prendre $N = \max_i N_i$.

(iii) Soit $k[X_1, ..., X_n]_{\leq n(N-1)}$ l'ensemble des polynômes avec un degré inférieur à $n(N-1)$. Par (ii), $(X_i - p_i)^N \in I$, donc $X_i^N = \sum_{i=0,...,N-1} a_i X_i^n \mod I$, avec certains éléments $a_i \in k$. Cela implique que pour tout $M \geq N$, il existe des éléments $a_i \in k$ tel que $X_i^M = \sum_{i=0,...,N-1} a_i X_i^n \mod I$.

Donc le morphisme k-linéaire composé

$$k[X_1, ..., X_n]_{\leq n(N-1)} \xrightarrow{\subset} k[X_1, ..., X_n] \longrightarrow k[X_1, ..., X_n]/I$$

est surjectif. Comme $k[X_1, ..., X_n]_{\leq n(N-1)}$ a une k-dimension finie, son quotient $k[X_1, ..., X_n]/I$ l'a aussi.

(iv) Dans $k[X, Y]/I$, la relation $X^2 = Y \mod I$ montre qu'il existe pour tout $M \geq 2$ des éléments $f_0(Y)$ et $f_1(Y)$ dans $k[Y]$ tel que $X^M = f_0(Y) + f_1(Y)X \mod I$. Comme $f_i(Y) = a_i \mod I$ avec $a_i \in k$, les deux éléments $1 \mod I$ et $X \mod I$ engendrent $k[X, Y]/I$ sur k. Comme ils sont linéairement indépendants, la k-dimension de $k[X, Y]/I$ est 2.