# Algèbre commutative et géométrie algébrique

Controle continu n° 1, 10 février 2023

Vous disposez de **1 heure** pour répondre aux questions des exercices suivants. Les documents et calculatrices sont interdits. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs. **Toutes les réponses devront être dûment justifiées**. Cet énoncé comporte 1 page et 3 exercices.

**Exercice 1** Soit $k$ un corps algébriquement clos et $k(x,y)[t]$ l'anneau des polynômes en une variable $t$ sur le corps $k(x,y)$. Déterminer une relation algébrique entre $x, y$ satisfaisant

$$\exists t \in k, x = t^2 + 1, y = t^4 + t^2$$

en calculant en résultant.

*Solution.*
On calcule

$$\operatorname{Res}(t^2+1-x, t^4+t^2-y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x & 0 & -y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & -y \end{vmatrix}.$$

On obtient donc

$$\operatorname{Res}(t^2+1-x, t^4+t^2-y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-x \\ 0 & -y & 0 \\ x & 0 & -y \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \\ x & 0 & -y \end{vmatrix} = -y(-y-x+x^2) - x(1-x)(-y-x+x^2),$$

ce qui vaut $(-y-x+x^2)(-y-x+x^2) = (y+x-x^2)^2$.

L'existence d'une racine commune à $x = t^2+1$ et $y = t^4+t^2$ dans $k$ est équivalente à l'annulation de leur résultant en $t$, soit donc $y = x^2 - x$.

**Exercice 2** Soit $k$ un corps. On travaille dans l'anneaux des polynômes $k[X,Y,Z]$ muni de l'ordre *deglex*.

(i) Calculer le $S$-polynôme de $X^2 - Y$ et $X^3 - Z$.

(ii) Est-ce que $X^2 - Y$ et $X^3 - Z$ forment une base de Gröbner ? Justifiez votre réponse.

*Solution.* (i) Le S-polynôme est

$$S(X^2-Y, X^3-Z) = X(X^2-Y) - (X^3-Z) = -XY + Z$$

(ii) Pour raisons de degré, aucun terme de $-XY+Z$ n'est multiple de $M(X^2-Y) = X^2$ ou $M(X^3-Z) = X^3$, donc $-XY+Z$ est sous forme normale. Donc $S(X^2-Y, X^3-Z) \not\to_+ 0$. Par le théorème de Buchberger, $X^2 - Y$ et $X^3 - Z$ ne forment pas une base de Gröbner.

**Exercice 3** Soit $F = X^d + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire avec $\deg F = d > 1$.

(i) Soit $p \in \mathbb{Z}$ un nombre premier tel que

$$p \mid a_i \ \ (i < d) \quad \text{ et } \quad p^2 \nmid a_0.$$

Montrer que $F$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

(ii) Utiliser le lemme de Gauss à propos des contenus pour montrer : si $F$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, alors $F$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

*Solution.*

(i) Soit $F = GH$ dans $\mathbb{Z}[X]$ avec $d > \deg G = e > 0$. Cela implique $X^d \equiv GH \bmod p$. Comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est intègre, on a donc $G = aX^e \bmod p$ et $F = bX^{d-e} \bmod p$ (avec $ab = 1 \bmod p$). Cela implique $G(0), H(0) \in (p)$ et donc

$$a_0 = F(0) = G(0)H(0) \in (p^2),$$

contradiction.

(ii) Soit $F = GH$ dans $\mathbb{Q}[X]$, avec $\deg F, G > 0$. Alors $F = aF'$ et $G = bG'$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ et $F', G' \in \mathbb{Z}[X]$ primitif. Ecrivons $a = r/s$ et $b = u/v$ avec $r, s, u, v \in \mathbb{Z}$. Alors $svF = ruF'G'$. Comme $F$ est unitaire, alors $c(F) = 1$ et le lemme de Gauss donne

$$sv = svc(F) = c(svF) = c(ruF'G') = ruc(F')c(G') = ru,$$

ce qui implique $F = F'G'$.