UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 11

Exercice 1

On considère deux suites exactes courtes de complexes de chaînes, avec des morphismes α, β, γ de l'une vers l'autre :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B_\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r, "f'"] & B'_\bullet \arrow[r, "g'"] & C'_\bullet \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Montrer qu'on a un diagramme commutatif long de la forme :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\beta_*"] & H_n(C_\bullet) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "\gamma_*"] & H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(A'_\bullet) \arrow[r, "f'_*"] & H_n(B'_\bullet) \arrow[r, "g'_*"] & H_n(C'_\bullet) \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(A'_\bullet) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Exercice 2

Soit X un espace topologique et $C_n(X)$ les groupes des chaînes singulières pour tout n.

1. Montrer que le morphisme bord $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ satisfait $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.
2. Soit Y un espace homéomorphe à X. Montrer qu'on a des isomorphismes de groupes

$$H_n(Y) \simeq H_n(X)$$

pour tout n.

Exercice 3

Soit X un complexe simplicial fini dans $\mathbb{R}^N$. A chaque n-simplexe $[a_0, ..., a_n]$ de X on associé canoniquement un n-simplexe singulier à valeurs dans la réalisation géométrique $|X|$ de X dans la maniére suivante :

$$\sigma : \Delta^n \xrightarrow{\simeq} [a_0, ..., a_n] \xrightarrow{\subset} |X|$$

où $\Delta^n \simeq [a_0, ..., a_n]$ est l'homéomorphisme induit par $v_i \mapsto a_i$.

1. Montrer qu'on obtient ainsi un morphisme de groupes $f_n : C_n^\Delta(X) \to C_n(|X|)$ pour tout n.
2. Montrer l'égalité $f_{n-1} \circ \partial_n^\Delta = \partial_n \circ f_n$ et en déduire l'existence d'un morphisme canonique de complexes de chaînes $f_\bullet : C_\bullet^\Delta(X) \to C_\bullet(|X|)$.
3. En déduire l'existence d'un homomorphisme canonique $H_n^\Delta(X) \to H_n(|X|)$ pour tout n.

Exercice 4

Soit X un espace topologique non vide et $(C_\bullet(X), \partial_\bullet)$ son complexe de chaînes singulières.

1. Montrer que $\varepsilon(\sum_\sigma a_\sigma \sigma) := \sum_\sigma a_\sigma$ donne un homomorphisme surjective $C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$.
2. Montrer que la suite augmentée

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X) \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

   est un complexe de chaînes. Soient $\widetilde{H}_n(X)$ les groupes d'homologie de ce complexe.
3. Montrer que $H_0(X) = \widetilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ et $H_n(X) = \widetilde{H}_n(X)$ pour $n > 0$.

Exercice 5

Soit $\mathcal{H} := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $n \in \{0, 1\}$.

1. Calculer les groupes d'homologie $H_n(\mathcal{H})$.
2. Calculer les groupes d'homologie $H_n(X)$ pour $X = \mathcal{H} \setminus \{\pm i\}$.
3. Calculer les groupes d'homologie $H_n(X)$ pour $X = \mathcal{H} \setminus \{\pm i, \pm 2i\}$.

Exercice 6

Soit X un espace connexe par arcs et $x \in X$. On considère un lacet γ basé en x comme un 1-cycle dans $Z_1(X)$. On note $\gamma \sim_c \gamma'$ si les deux cycles différent par un bord, i.e. $\gamma - \gamma' \in B_1(X)$.

Montrer : si γ est le chemin constant, alors $\gamma \sim_c 0$.