UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 10

Exercice 1

Soit X un complexe simplicial fini dans $\mathbb{R}^N$. Montrer :

1. Chaque simplex dans X hérite d'un ordre unique dans X (i.e. il n'y a pas deux fois le même simplex σ dans X avec deux ordres différents).
2. La réalisation géométrique $|X|$ est partionné par les intérieurs de ses simplexes.
3. $|X|$ est un CW-complexe son k-squelette étant la réunion des simplexes de dimension $\leqslant k$.
4. La topologie faible sur le CW-complexe $|X|$ coincide avec la topologie induite de $\mathbb{R}^N$.
5. Si on se donne un ensemble fini Σ de simplexes non-ordonnés qui satisfont les conditions 1. et 2. de la définition VI.4 (sans les conditions sur l'ordre), et si on se donne un ordre total sur les sommets de Σ, cela donne un ordre sur tout les simplexes qui en fait un complexe simplicial.

Exercice 2

Soit $X = [v_0, v_1, v_2]$ le 2-simplex standard ordonné, vu comme le complexe simplicial fini dans l'exemple VI.13. Montrer par un calcul explicit que $H_n^\Delta(X) = 0$ pour $n \geqslant 1$ et $H_0^\Delta(X) = \mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ le tore de dimension 2, vu comme un complexe fini dans l'exemple VI.14. Montrer par un calcul explicit que

$$H_n^\Delta(\mathbb{T}^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{pour} \quad n = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{pour} \quad n = 0, 2 \\ 0 & \text{pour} \quad n \geqslant 3. \end{cases}$$

Exercice 4

Soit Γ un graphe fini connexe et $\chi(\Gamma)$ sa caractéristique d'Euler-Poincaré. Comme deuxième invariant, on introduit la *connectivité* $c(\Gamma)$ de Γ, c.à.d. le plus grand des entiers n ayant la propriété suivante :

il existe une suite $e_1, ..., e_n$ d'arêtes distinctes de Γ telle que $\Gamma \setminus \{e_1 \cup \cdots \cup e_n\}$ soit connexe.

1. Prouver la formule $c(\Gamma) = 1 - \chi(\Gamma)$ par recurrence sur le nombre d'arêtes de Γ.
2. En déduire que Γ est un arbre (i.e. sans cycle) si et seulement si $\chi(\Gamma) = 1$.

Exercice 5

1. Soit $N \subset M$ un sous-module d'un $\mathbb{Z}$-module de type fini M. Montrer que N et M/N sont de type fini et qu'on a

$$rg(M/N) = rg(M) - rg(N).$$

2. Montrer qu'un morphisme $f : C_\bullet \to C'_\bullet$ de complexes de chaînes induit un morphisme de groupes

$$H_n(f) : H_n(C_\bullet) \to H_n(C'_\bullet)$$

pour tout $n \geqslant 0$ qui est fonctoriel : $H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$ et $H_n(id) = id$.

Exercice 6

Soit

$$0 \longrightarrow A_\bullet \longrightarrow B_\bullet \longrightarrow C_\bullet \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de complexes de chaînes. Soit

$$\delta_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$$

le morphisme connectant pour $n \geqslant 0$. Montrer que la suite longue en homologie

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H_n(A_\bullet) \longrightarrow H_n(B_\bullet) \longrightarrow H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(A_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

est exacte à chaque maillon (il y aura donc trois cas à considérer).