UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 9

Exercice 1

Soit G un groupe topologique. Une *opération continue à gauche* de G sur un espace topologique X est la donnée d'une application continue $(g, x) \mapsto gx$ de $G \times X$ dans X ayant les propriétés suivantes : (i) $1x = x$ (ii) $g(hx) = (gh)x$ pour tout $g, h \in G, x \in X$. Montrer :

1. Pour tout élément $g \in G$ l'application $x \mapsto gx$ est un homéomorphisme de X. On obtient ainsi un homomorphisme de G dans le groupe des homéomorphismes de X.

2. Inversement, si G est un groupe discret la donnée d'un homomorphisme de G dans le groupe des homéomorphismes de X détermine une opération à gauche de G sur X.

Exercice 2

Soit G un groupe topologique opérant continûment à gauche sur un espace X. Soit R la relation d'équivalence sur X dont les classes sont les orbites des points de X. L'espace quotient X/R est noté X/G et appelé *l'espace des orbites* de G dans X. Montrer :

1. L'application quotient $p : X \to X/G$ est une application ouverte.

2. Si G et X sont compacts, alors l'espace quotient X/G est séparé.[1]

Exercice 3

Soit G un groupe discret opérant continûment à gauche sur un espace X. On dit que l'action est *proprement discontinue* si pour tout compact $K \subset X$, il n'y a qu'un nombre fini de $g \in G$ tel que $gK \cap K \neq \emptyset$. Montrer l'annoncée suivante :

Une action libre et proprement discontinue de G sur un espace localement compact X est une action errante.

1. Vous pouvez utiliser que X/G est séparé si et seulement si le graphe de R est fermé dans $X \times X$.

Exercice 4

Le groupe $\mathbb{Z}$ opère continûment sur les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ par translation, i.e. $a(x) = x + a$.

1. Montrer que l'action est une action de revêtement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
2. Redémontrer que $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ et $\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

Exercice 5

Le groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit sur la sphère $\mathbb{S}^n$ via l'involution $x \mapsto -x$. Soit $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/G$ la projection canonique. Soit $*$ un point de base de $\mathbb{S}^n$ ou de $P^n\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'action de G est une action de revêtement sur $\mathbb{S}^n$.
2. Soit $n = 1$. Comparer p au revêtement $z \mapsto z^2$ du $\mathbb{S}^1$ et en déduire que
$$\operatorname{im} p_* = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1/G, *).$$
3. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $\pi_1(\mathbb{S}^n/G, *) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. En déduire que $\pi_1(P^n\mathbb{R}, *) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geqslant 2$. [2]

Exercice 6

On considère le n-simplex standard dans $\mathbb{R}^{n+1}$
$$\Delta^n := \{(t_0, ..., t_n) : \sum_i t_i = 1, t_i \geqslant 0 \ \forall i\}.$$

On appelle une *k-face* de Δ^n une face de Δ^n ayant $k + 1$ sommets.

1. Dessiner Δ^n (dans l'espace affine $v_0 + \mathbb{R}^n$) dans le cas $n = 0, 1, 2, 3$.
2. Soit $m(k)$ le nombre de k-faces de Δ^n. Donner les valeurs $m(0), m(1)$ et $m(n)$.
3. Soit X^m la réunion de toutes les k-faces de Δ^n pour $k \leqslant m$. Montrer que $\cup_m X^m$ est un CW-complexe de dimension n qui coincide avec Δ^n (comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$).
4. Soit $\sigma = [a_0, ..., a_n]$ un n-simplexe ordonné dans $\mathbb{R}^N$. Montrer qu'il y a des $\mathbb{R}$-espaces affines E et A de dimension n tel que $\Delta^n \subset E$ et $\sigma \subset A$ et une seule application affine $f : E \to A$ avec $f(v_i) = a_i$ pour tout i. En déduire que f induit un homéomorphisme $\Delta^n \simeq \sigma$.

2. Cela généralise le cas $n = 2$ de l'exercice 1, Feuille 6.