Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 8

Exercice 1

On identifie $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$ avec générateur $t \mapsto \exp(2\pi i t)$. Soit $n \geqslant 1$ et $q_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ le revêtement $z \mapsto z^n$.

1. Calculer l'image de $(q_n)_*$ dans $\mathbb{Z}$.
2. Soient $m, n \geqslant 1$. Montrer que l'existence d'une unique application continue $f : (\mathbb{S}^1, 1) \to (\mathbb{S}^1, 1)$ tel que $q_n = q_m \circ f$ est équivalent à $m \mid n$. Dans ce cas, déterminer l'application f.
3. On identifie la fibre $q_n^{-1}(1)$ avec $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en envoyant $\exp(\frac{2\pi i k}{n})$ sur $k + n\mathbb{Z}$ pour $k = 0, \ldots, n-1$. Montrer que l'action de monodromie de $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ sur $q_n^{-1}(1)$ s'identifie à l'action naturelle de $\mathbb{Z}$ sur le groupe abélien $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 2

On se place dans la situation du théorème d'existence du revêtement universel. Donc soit (X, x_0) connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Avec un bon ouvert $U \subset X$, un point $z \in U$ et un chemin γ de x_0 à z, on forme l'ensemble $U_{[\gamma]}$. Montrer les quatre propriétés suivantes :

1. $U_{[\gamma]}$ ne dépend que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ de γ.
2. Si α est un chemin dans U d'origine z, alors $U_{[\gamma.\alpha]} = U_{[\gamma]}$.
3. Si $U' \subset U$ est un bon ouvert dans U avec $z \in U'$, alors $U'_{[\gamma]} \subset U_{[\gamma]}$.
4. Pour γ' un chemin de x_0 à z, on a $U_{[\gamma']} = U_{[\gamma]}$ si $\gamma' \sim \gamma$ et $U_{[\gamma']} \cap U_{[\gamma]} = \emptyset$ sinon.

Exercice 3

On considère l'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times, z \mapsto e^z$.

1. Montrer que la projection $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$, où $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ a sa topologie quotiente, est un revêtement.
2. Montrer que exp induit un homéomorphisme h de $\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}^\times$ tel que $\exp = h \circ q$.
3. En déduire que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ est le revêtement universel de $\mathbb{C}^\times$.