Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 7

Exercice 1

Soit $p : Y \to X$ un homéomorphisme local.

1. Montrer que p est une application ouverte, i.e. $p(U) \subset X$ est ouvert pour tout ouvert $U \subset Y$.
2. Soit $A \subset X$. Montrer que p induit un homéomorphisme local $p^{-1}(A) \to A$. En déduire que la fibre $p^{-1}(x) \subset Y$ est un sous-espace discrète pour tout $x \in X$.
3. Soit p un revêtement. Montrer que p est *localement trivial*, i.e. tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert V tel que p induit un revêtement trivial $p^{-1}(V) \to V$.
4. Soit p un revêtement. Montrer que X separé implique Y separé.

Exercice 2

On considère l'hyperbole $H = \{(x, y) : xy = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ et

$$X = H \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Soit $p : X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$ la projection.

Montrer que p est un homéomorphisme local, mais pas un revêtement.

Exercice 3

Un espace X est *localement connexe par arcs*, si pour tout point $x \in X$ et tout voisinage V de x, il existe un voisinage $U \subset V$ contenant x et connexe par arcs.

1. Montrer que les composantes connexes par arcs d'un espace localement connexe par arcs X sont ouvertes dans X. En déduire qu'un espace localement connexe par arcs, qui est connexe, est connexe par arcs.
2. En déduire qu'un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

3. Un espace séparé tel que tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ s'appelle *une variété topologique (de dimension n)*, cf. feuille 2. En déduire qu'une variété topologique qui est connexe, est connexe par arcs.

Exercice 4

Soit $p : \widetilde{X} \to X$ un revêtement entre deux espaces séparés. Soit $\widetilde{X}$ connexe par arcs et $x \in X$. Soit $\widetilde{x} \in p^{-1}(x), [\gamma] \in \pi_1(X, x)$ et

$$\widetilde{x}.[\gamma] := \widetilde{\gamma}(1) \in \widetilde{X}$$

où $\widetilde{\gamma} : [0, 1] \to \widetilde{X}$ est le relève d'origine $\widetilde{x}$ du lacet γ.

1. Montrer que $(\widetilde{x}, [\gamma]) \mapsto \widetilde{x}.[\gamma]$ donne une action à droite du groupe $\pi_1(X, x)$ sur la fibre $p^{-1}(x)$.

2. Montrer que l'action est transitive.

3. Soit $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. Montrer que le stabilisateur du point $\widetilde{x}$ dans $\pi_1(X, x)$ est l'image du morphisme canonique $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \to \pi_1(X, x)$.

4. En déduire, dans la situation de 3., qu'il y a une bijection $p^{-1}(x) \simeq \mathrm{im}(p_*)\backslash\pi_1(X, x)$.

Exercice 5

Soit $P^n\mathbb{R}$ l'espace projectif réel de dimension n. L'injection canonique $i : \mathbb{S}^n \to (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ induit un homéomorphisme $\mathbb{S}^n/R \xrightarrow{\simeq} P^n\mathbb{R}$ où R est la relation d'antipodie $x \sim -x$ sur $\mathbb{S}^n$. Soit

$$q : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n/R = P^n\mathbb{R}$$

l'application canonique et soit $x \in P^n\mathbb{R}$ un point de base.

1. Soit $z \in \mathbb{S}^n$ et $U(z) = \{z' \in \mathbb{S}^n : ||z - z'|| < 1/2\}$. Montrer que $q(U(z)) \subset \mathbb{S}^n/R$ est ouvert et que $q|_{U(z)} : U(z) \xrightarrow{\simeq} q(U(z))$ est un homéomorphisme.

2. En déduire que q est un revêtement à deux feuillets de $P^n\mathbb{R}$.

3. Montrer que le stabilisateur dans $\pi_1(P^n\mathbb{R}, x)$ d'un point $\widetilde{x} \in q^{-1}(x)$ est $2\mathbb{Z}$ resp. 1 dans le cas $n = 1$ resp. $n = 2$.