Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 6

Exercice 1

Soit $P^n\mathbb{R}$ l'espace projectif réel de dimension n, défini par

$$P^n\mathbb{R} := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \ ,$$

où la relation $\sim$ est définie par $x \sim y$ si $x = \lambda y$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^\times$. Soit q la projection canonique $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n\mathbb{R}$. Montrer :

1. La sphère $\mathbb{S}^n$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant à la boule $\mathbb{B}^n$ une second boule $\mathbb{B}^n$ au moyen de l'application identique $id : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ sur $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$.
2. L'injection canonique $i : \mathbb{S}^n \to (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ induit un homéomorphisme $\mathbb{S}^n/R \xrightarrow{\simeq} P^n\mathbb{R}$ où R est la relation d'antipodie $x \sim -x$ sur $\mathbb{S}^n$.
3. L'espace $P^n\mathbb{R}$ est homéomorphe à l'espace obtenu à partir de la boule $\mathbb{B}^n$ en identifiant les points x et $-x$ pour $x \in \mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n$.
4. L'application canonique q, restreint à $\mathbb{S}^1$, se factorise via l'application $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{S}^1$ sur lui-même et un homéomorphisme $\mathbb{S}^1 \simeq P^1\mathbb{R}$.
5. L'espace $P^2\mathbb{R}$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant à $\mathbb{S}^1$ une boule $\mathbb{B}^2$ au moyen de l'application $z \mapsto z^2$ sur $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{B}^2$. On note $x \in P^2\mathbb{R}$ le point qui correspond au point $1 \in \mathbb{S}^1$.
6. Le groupe fondamental $\pi_1(P^2\mathbb{R}, x)$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 2

Pour un entier $k \geqslant 1$, soit $X_k = \mathbb{S}^1 \cup_{f_k} \mathbb{B}^2$ obtenu en recollant la boule $\mathbb{B}^2$ à $\mathbb{S}^1$ au moyen de l'application $f_k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, z \mapsto z^k$ de degré k. Soit z_0 l'image de $1 \in \mathbb{S}^1$ dans X_k.

1. Montrer que le groupe fondamental $\pi_1(X_k, z_0)$ est cyclique d'ordre k, i.e. $\pi_1(X_k, z_0) \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.
2. Soit $P^2\mathbb{R}$ le plan projectif réel. En déduire à nouveau que $\pi_1(P^2\mathbb{R}, z_0) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 3

Soit $X = \cup_{n\geqslant 0} X^n$ un CW-complexe. Soit

$$B_n = \coprod_{i\in I_n} \mathbb{B}_i^n \quad \text{et} \quad S_n = \coprod_{i\in I_n} \mathbb{S}_i^{n-1} \subset B_n.$$

L'ensemble $\{f_i\}_{i\in I_n}$ induit une application $f_n : S_n \to X^{n-1}$ défini par $f_n|_{\mathbb{S}_i^{n-1}} = f_i$ et on a par définition

$$X^n = X^{n-1} \cup_{f_n} B_n.$$

Soit $q_n : X^{n-1} \coprod B_n \to X^n$ l'application canonique et $\widetilde{f}_i = q_n|_{\mathbb{B}_i^n}$. On appelle

$$e_i^n = \widetilde{f}_i(\mathring{\mathbb{B}}_i^n) \quad \text{resp.} \quad \overline{e}_i^n = \widetilde{f}_i(\mathbb{B}_i^n)$$

une *n-cellule ouverte* resp. une *n-cellule fermée* de X.

1. Montrer que e_i^n est homéomorphe à $\mathring{\mathbb{B}}_i^n$ et ouverte dans X^n, et $\overline{e}_i^n$ est fermée dans X^n.[1]
2. Montrer que l'ensemble X est la réunion disjointe de tous ces cellules ouvertes $e_i^n, i \in I_n, n \geqslant 0$.

Exercice 4

Soit $p : Y \to X$ un homéomorphisme local.

1. Montrer que p est une application ouverte, i.e. $p(U) \subset X$ est ouvert pour tout ouvert $U \subset Y$.
2. Soit $A \subset X$. Montrer que p induit un homéomorphisme local $p^{-1}(A) \to A$. En déduire que la fibre $p^{-1}(x) \subset Y$ est un sous-espace discrète pour tout $x \in X$.
3. Soit p un revêtement. Montrer que p est *localement trivial*, i.e. tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert V tel que p induit un revêtement trivial $p^{-1}(V) \to V$.
4. Soit p un revêtement. Montrer que X separé implique Y separé.

1. Vous pouvez utiliser qu'un CW-complexe est separé (admis).