Topologie algébrique

TD

Feuille d'exercices 4

Exercice 1

Pour tout group G on désigne par $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par les éléments $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$ pour $g, h \in G$. On dit que $[g, h]$ est le *commutateur* de g et h, et que $[G, G]$ est le *sous-groupe des commutateurs* de G.

1. Le sous-groupe $[G, G]$ est un sous-groupe distingué de G.
2. Le sous-groupe $[G, G]$ est le plus petit sous-groupe distingué H de G tel que G/H soit abélien.
3. Un homomorphisme de G dans un groupe abélien H détermine un homomorphisme de $G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$ dans H.
4. Soient A et B deux groupes et $G = A * B$ leur produit libre. Montrer que $G/[G, G]$ s'identifie au produit direct $A^{\mathrm{ab}} \times B^{\mathrm{ab}}$.

Exercice 2

1. Soit F un groupe libre engendré par un ensemble S. Montrer que $F/[F, F]$ est isomorphe au groupe abélien libre $\mathbb{Z}^{(S)}$ (la somme direct des copies de $\mathbb{Z}$, indexées par S).
2. Montrer : Pour que deux groupes libres F resp. F' engendrés par des ensembles S resp. S' soient isomorphes il faut et il suffit que S et S' aient même cardinal.
3. Montrer que tout groupe est isomorphe à un groupe quotient d'un groupe libre.

Exercice 3

Soit $n \geqslant 3$ et $P \subset \mathbb{R}^2$ un polygone régulier à n côtés avec centre $(0, 0)$. Soit D_{2n} *le groupe diédral d'ordre* $2n$, i.e. le groupe d'isométries linéaires de $\mathbb{R}^2$ conservant P.

1. Montrer que $D_{2n} \simeq \langle r, s | s^2 = 1, r^n = 1, srs = r^{-1} \rangle$.
2. Montrer que $D_{2n} \simeq \langle t, s | t^2 = 1, s^2 = 1, (st)^n = 1 \rangle$ est aussi une présentation de D_{2n}.

Exercice 4

Soit D_∞ *le groupe infini diédral*, i.e. le sous-groupe des isométries de la droite réelle $\mathbb{R}$ engendré par la réflexion $x \mapsto -x$ et la translation $x \mapsto x+1$.

1. Montrer que $D_\infty \simeq \langle t, s | t^2 = 1, s^2 = 1 \rangle$.
2. En déduire que D_∞ est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. En déduire que le group D_{2n} est un quotient de D_∞ pour tout n.

Exercice 5

Soit E un espace topologique, $F \subset E$ un sous-espace non vide et $f : F \to E$ une application continue ayant la propriété suivante : pour tout $x \in F$, l'ensemble $\{x, f(x), f^2(x), ..., \}$ contient au plus deux points distincts (cette hypothèse est par exemple satisfaite si $F \cap f(F) = \emptyset$, ou si f est l'application constante de F sur un point de E).

Soit R la relation d'équivalence suivante :

- si $x \notin F \cup f(F)$, la classe d'équivalence de x est $\{x\}$,

- si $x \in F$, la classe d'équivalence de x est $\{f(x)\} \cup \{f^{-1}(f(x))\}$,

- si $x \in f(F) \setminus (F \cap f(F))$, la classe d'équivalence de x est $\{x\} \cup \{f^{-1}(x)\}$.

L'espace quotient E/R est *l'espace obtenu en identifiant les points x et $f(x), x \in F$.*

Montrer que, si E est un espace compact et si $F \subset E$ est fermé, alors l'espace E/R est séparé[1] et donc compact. Dans ce cas, la projection $q : E \to E/R$ est un homéomorphisme de l'ouvert $U = E \setminus (F \cup f(F))$ sur l'ouvert $q(U)$.

Exercice 6

Soient X et Y deux espaces topologiques, $F \subset Y$ un sous-espace non vide et $f : F \to X$ une application continue. Soit $X \coprod Y$ la réunion disjointe de X et Y. L'espace $(X \coprod Y)/R$, obtenu en identifiant les points x et $f(x), x \in F$, est noté $X \cup_f Y$ et appelé *l'espace obtenu en recollant Y à X au moyen de l'application f*. Montrer :

1. Si X et Y sont connexes (par arcs), $X \cup_f Y$ est connexe (par arcs).
2. Si X et Y sont compacts et $F \subset Y$ fermé, $X \cup_f Y$ est compact. Dans ce cas, la projection $q : X \coprod Y \to X \cup_f Y$ est un homéomorphisme de X sur $q(X)$.
3. Soit E un espace réunion de sous-espaces fermés X et Y. Si $X \cap Y$ n'est pas vide, alors $E \simeq X \cup_f Y$ où $f : X \cap Y \xrightarrow{\subset} X$ est l'inclusion.

1. Vous pouvez utiliser que E/R est séparé si et seulement si le graphe de R est fermé dans $E \times E$.